



TITLE:

非平衡系の周期構造における位相  
跳躍線の構造と運動(  
Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

水口, 毅

---

CITATION:

水口, 毅. 非平衡系の周期構造における位相跳躍線の構造と運動. 京都大学, 1993, 博士(理学)

ISSUE DATE:

1993-07-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3070326>

RIGHT:

②

学位申請論文  
非平衡系の周期構造における  
位相跳躍線の構造と運動

水口 毅

平成5年4月

## Abstract

2次元液晶対流系において発見された線状欠陥に関する研究を行なった。この実験で観測された線状欠陥は、端点を持ち得るという構造上の特徴の他に、線状欠陥の一部が螺旋波を生み出すなどして動的に振舞う、あるいは安定な周期構造をつくるといった運動・パターンに関する特徴も持ち合わせている。これに対し、我々は構造・運動の両面から研究を行なう。構造に関する研究では、線状欠陥がその両側で位相が $\pi$ だけとんでいる位相跳躍線あるいは一種の界面であり、端点には半整数のトポロジカルな電荷を持った特異点があることを示す。さらに、一般論を展開し、この端点を持つ線状欠陥を2つの場の欠陥が複合した複合型の欠陥としてとらえる。また、生成消滅過程や組変え過程を素過程として分類し、波数 $k$ と $2k$ のモードの共鳴相互作用を記述する簡単なモデルを数値的に解くことによって、緩和過程において端点を持つ線状欠陥と持たない線状欠陥が自発的に形成されることを示す。後半では運動に関する研究を行なう。実験で観測されている線状欠陥の奇妙な振舞いの一部は端点の有無によらないと言う仮定のもとに、閉じた線状欠陥の運動を論ずる。端点を持ち得る場合への拡張性や、実験で観測されている対称性を考慮することによって、振動媒質に振動数比がほぼ1:2の共鳴外力を加えた系を記述する単純なモデルを用い、一様状態、1次元系、2次元系に対する解析を順に行なう。一様状態の解析では極めて複雑な解の分岐構造を明らかにする。1次元系では既にIsing型、Bloch型と言う2種類の界面が知られているが、新しく数値的に発見された単独界面の様々な形の振動現象を報告し、相空間の適当な断面を見ることによって、それらの間の分岐の型を特定する。また、界面の時空間欠的な発展や、引き込みの破れによる空間構造の形成についても述べる。2次元系においては、界面の内部自由度に起因する新しい高次元的な効果を提唱し、実験で観測された現象を定性的に説明する。

## 謝辞

本研究を続けるに当たって私を支えてくれた全ての人に感謝します。特に佐々真一氏には研究全般を通じて様々なアイデアを出していただいくとともに、活発で有益な議論を数多くしていただきました。本研究の一部は同氏との共同研究であり、構造に関する一般論をはじめとするここにあげられた成果の多くに対しては同氏の寄与が大きく、その協力がなければ決して成し遂げられなかったと思われます。佐野雅己助教授をはじめとする東北大学電気通信研究所の皆様には、非常に興味深い実験結果をいくつも紹介していただき、研究テーマを決定する上で大きな指針となりました。さらに未発表の貴重な実験データを拝見させていただくと共に、実験状況を詳細に説明していただき、大変参考になりました。本論文の2章の実験データはそのほとんどが同氏の御好意によるものです。茶碗谷毅氏をはじめとする京都大学理学部非線形動力学研究室ならびに物性理論研究室の皆様からも、貴重な意見やアイデアを参考にさせていただきました。高見利也氏、渡辺健氏には数値計算のプログラム作成で大変お世話になりました。また、太田隆夫教授、坂口英継氏、澤田康次教授、甲斐昌一教授、那須野悟氏、古賀真史氏、柳田達雄氏、H.Chaté氏、J.Beatrice嬢にも様々な観点から議論をしていただきました。ここにあげることの出来なかった方々も沢山おられますが、これら全ての方々に深く感謝します。

蔵本由紀教授には、本研究のみならず、5年間の研究全体を通じて、数多くの有益な議論や助言をしていただきました。本研究に関しても、特に、後半の運動の高次元効果に関する部分で、本質を取り出すための重要な示唆を与えていただくなど、より広い視野からの考察を加えていただきました。また、主論文及び参考論文の内容に関しても大変お世話になりました。ここに深く感謝の意を表します。

なお、この研究で行なわれた数値計算の一部は湯川理論物理学研究所の計算機を用いて行なわれました。



# 目次

1	Introduction	4
2	Experimental Results	6
3	Structure	11
3.1	端点の構造	11
3.2	一般論	16
3.3	素過程	19
3.3.1	生成消滅過程	19
3.3.2	組変え過程	19
3.4	単純なモデル	21
3.5	まとめ	23
4	Motion	24
4.1	共鳴外力下の系	25
4.1.1	モデル方程式	25
4.1.2	一様状態の解析	26
4.2	1次元系	35
4.2.1	Ising 型界面と Bloch 型界面	35
4.2.2	振動型界面と投影 $\chi$	37
4.2.3	複数界面の運動・パターン	43
4.2.4	引き込みの破れと空間構造の形成	44
4.2.5	まとめ	45
4.3	2次元系	46
4.3.1	低次元系からの単純な拡張	46
4.3.2	界面上の内的な系	46
4.3.3	その他のパターン	52
4.4	まとめ	55
5	Conclusion	56



# Chapter 1

## Introduction

非平衡開放系に関する研究、特にそのパターンやダイナミクスに関する分野では、複雑な振舞いを示す現象が数多く報告され、またそれらに関する研究も理論・実験の両面から盛んに行なわれている。例えば振動子系 [1]、対流系 [2, 3, 4, 5]、結合写像系 [6, 7, 8, 9]、粉体系 [10, 11, 12, 13]、沸騰現象 [14]、破壊現象などにおいては引き込みによる空間パターンの形成、欠陥カオス、自発的に生成消滅を繰り返す局在構造、層流と乱流の共存、時空間欠性、流動化現象、泡の核膜転移といった基礎方程式系あるいは個々のユニットの性質からは想像もできない (あるいは非常に理解しにくい) 豊かな振舞いが発見されている [15]。これらの現象を理解する場合、複雑な基礎方程式系から出発しなくても、Newell と Whitehead の提唱した振幅方程式に代表されるような、対称性などのいくつかの単純な仮定から出てくる経験的な方程式を用いることによって、その現象の特徴を抽出し、再現することができる [16]。これはすべての問題を基礎方程式に還元して説明する方法とは異なり、議論の出発点を自由に選べるという利点を持っている。無論、その経験的な方程式は少なくとも系の記述しようとする性質を持ち、再現できなければならない。逆にいえば、その経験的な方程式で何が説明できるか — つまりその方程式はどの特徴をとらえたモデルであるかということが、方程式自身の性質として残るのである。このような性質はそれぞれの現象に固有のものではなく、自然界の至るところで見られる現象の共通項を表すことができる。すなわち、分岐、時空間欠性、トポロジカルな欠陥などはこうした複雑な現象を理解する際の重要な概念であり、対応する個々の現象の本質を表現するだけでなく、こうした複雑な現象を統一的に理解するための「共通言語」として極めて有効あるいは有望であり、研究を進める上での大きなテーマになっている。

本研究は液晶を用いた電気流体力学系の対流現象における数々の興味深い実験結果に動機付けられたものであり、研究対象は其中で振動するグリッドパターンを背景として発見された新しい種類の線状欠陥 (以下「ひも」) の構造と、そのパターン及びダイナミクスである [17]。この線状欠陥は端点を持ち得るという構造上の特徴と、線状欠陥の一部が螺旋波を生み出すなどして動的に振舞う、あるいは安定な周期構造をつくるという運動・パターンに関する特徴を持つ。本研究の目的は、その特徴的な現象を再現できるモデルを構成し、解析することによってその本質をとらえ、何らかの理論的な予言を行なうというものである。しかし、「ひも」の持つすべての性質を同時に再現するモデルを構成



するのは難しい。そこで我々は1つ1つの特徴的な性質を再現することから始めた。すなわち、端点を持ち得るという構造上の特徴と、運動及びパターンに関する特徴である。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では研究の対象となった液晶対流系の実験について説明する。我々は直接実験に関与してはいないが、対象となる「端点を持つひも」が観測される状況はかなり複雑であり、出来る限り詳しい説明を試みた。詳しくは文献[17]を参照されたい<sup>1</sup>。

第3章では「ひも」の構造に関して論ずる。第1節では実験系から示唆される条件から端点の構造に関する考察を行ない、第2節ではトポロジカルな議論を通して「ひも」が一種の界面、あるいはその両側で位相が $\pi$ だけとんでいる位相跳躍線であることを示し、それが端点を持つための条件を明らかにする。第3節では「ひも」の素過程について説明をする。第4節では第2節で得られた条件を満たす、より簡単なモデルとして波数 $k-2k$ のモードが同時に不安定になった場合の共鳴相互作用を考慮したモデルを導入し、数値実験を通して実際に「閉じたひも」と「開いたひも」が緩和過程で構成されることを示す。第5節では構造に関して残された問題や、得られた結果がパターン及び運動に関する議論にどのような示唆を与えるかを論ずる。なお、3章の2、4節は主論文[18]の内容を要約したものである。

第4章はパターン及び運動のためのものである。第一歩として端点の効果を排除し「閉じたひも」のつくるパターン及び運動に関して論ずる。第1節では「閉じたひも」だけを再現するための、より簡単なモデル方程式を導入し、空間微分項を無視することによって一様解の存在及び安定性解析を行なう。第2節では1次元系の界面の運動を議論する。これは2次元系の準備段階として考えたものであり、実現される界面は0次元すなわち点であるが、その性質は多様で報告する価値がある。第1節で導入されたモデルには既に2種類の界面解が発見されており、それぞれ Ising 型、Bloch 型と呼ばれている。我々は副産物的にはあるが、振動型という新しいタイプの界面を数値的に発見すると共に、界面の形を特徴付ける射影を導入することによって、界面のタイプが入れ替わる際に起こる分岐の型を明らかにした。また数値実験によって得られた様々な現象を解説する。第3節では2次元系を取り扱う。実現される界面は1次元的な広がりを持った「閉じたひも」になり、得られた性質は実験結果と直接比較することができるようになる。前節で得られた1次元系に現れる0次元界面の性質を拡張するのは容易であり、そこからいくつかの「ひも」の振舞いが予想されるが、実験及び数値実験の結果はそれだけでは説明できない挙動を示している。これに対し、新しい種類の高次元効果を提唱し、定性的な説明を試みる。第4節では運動に関して残された問題と端点の影響について論ずる。なお、4章の1、2節は主論文[19]の内容を解説したものである。

第5章では得られた結果をまとめ、今後の問題点を議論する。

<sup>1</sup> 2章で示される図は模式図以外全て佐野雅己氏の御好意による。



## Chapter 2

# Experimental Results

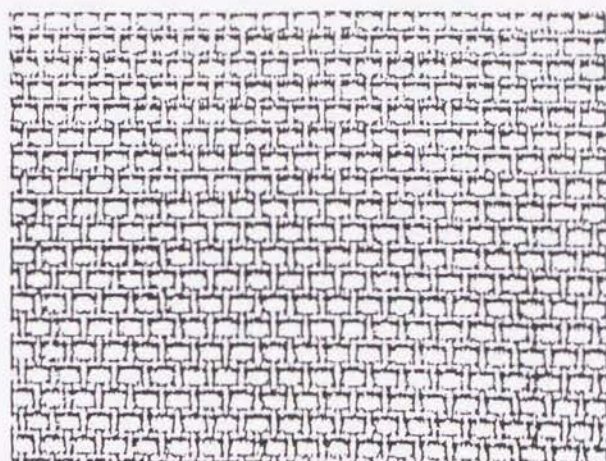
2次元液晶対流系は異方的な系で、コントロールパラメータとして印加電圧と周波数を持っており、それらを変化させることによって、一様静止状態から乱流状態に至るまで実に様々な静的なあるいは動的なパターンが観測される [2, 4, 15, 20, 21, 22, 23]. すなわち、パラメータの変化と共に系の時間的及び空間的な対称性の破れや回復が起こり、様々な巨視的なパターンが実現されるのである. 例えば周波数がある値に固定し、印加電圧を上げていくことによって、一様静止状態、Williams Domain と呼ばれるロール構造 [4, 20, 24, 25]、Fluctuated Williams Domain と呼ばれる欠陥乱流 [21, 26, 27]、グリッドパターンと呼ばれる格子状の対流セルなどが観測されている [17, 21]. 印加電圧をさらにあげると、いわゆる乱流状態が実現されるが、その中でも DSM1, DSM2 と呼ばれる2種類の乱流が知られている [21].

我々が着目する現象は、振動する2次元グリッドパターンを背景として現れているので、グリッドパターン及びその振動状態についてももう少し詳しく説明しなければならない. 観測されるグリッドパターンにもいくつかの種類があり、定常的なものや振動しているものなどがあるが、まず定常グリッドパターンについて述べる. 定常グリッドパターンは、対流セルが煉瓦のようにならんでおり、2方向に周期を持った周期パターンである (Figure 2.1参照). 対流セルの形を特徴付ける場の量  $U_0(x, y)$  (物理的には例えばネマティック液晶分子の回転角や流体速度の上向き成分に対応する) は次の関数でよく近似できる.

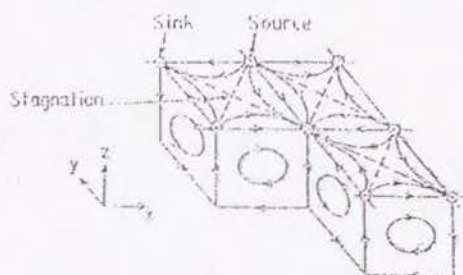
$$U_0(x, y) = \frac{1}{2} G_1 (\cos(k_x x + k_y y + \phi_+) + \cos(k_x x - k_y y + \phi_-)) \quad (2.1)$$

$$= G_1 \cos(k_x x + \phi_1) \cos(k_y y + \phi_2) \quad (2.2)$$

ここで  $G_1$  はパターンの緩やかな変化を示す振幅であり  $k_x, k_y$  はそれぞれグリッドパターンの周期方向の波数、 $\phi_+, \phi_-, \phi_1, \phi_2$  は定数である. もし  $G_1 = \text{const.}$  ならば Figure 2.1 のようなグリッドパターンを再現する. このことは定常なグリッドパターンが斜めのロールの重ね合わせで表現できると同時に、 $x, y$  それぞれの方向のロール解の積としても表現できることを意味している. ここで我々は後に重要な役割を果たすことになる点欠陥について述べておかなければならない. ロールのような周期構造に対してトポロジカルな欠陥 (defect)、すなわち周期構造から自然に導入される位相に対する特異点が存在することは

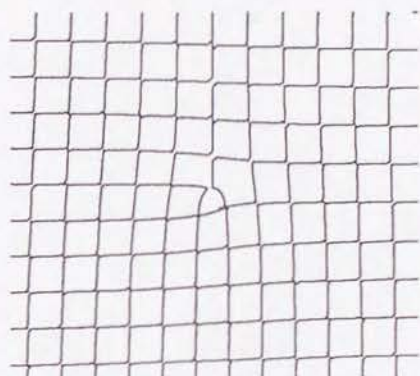


(a)

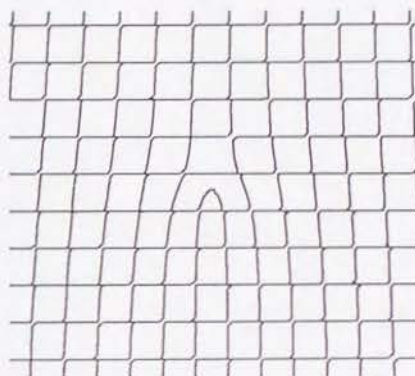


(b)

Figure 2.1: (a) 定常グリッドパターンと (b) 流れの模式図 (文献 [23] より転載) .



F



B

Figure 2.2: グリッドパターンに現れる欠陥の模式図.

良く知られているが [4, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 25]、このグリッドパターンに対しても同様の点欠陥が観測されている。一つはその点まで縦 (y) 方向と横 (x) 方向にそれぞれ一列ずつの余分なセルがある (あるいは抜けている) というもので、もう一つはその点まで縦 (y) 方向あるいは横 (x) 方向いずれか一方に二列の余分なセルがある (あるいは抜けている) というものである。Figure 2.2はその模式図であり、F は前者に、B は後者に対応する。次章で欠陥の分類が行なわれるが、特にタイプ F は後に述べる線状欠陥の端点になるという重要な役割を果たす。それを説明するためにはまず振動グリッドパターンについて述べなければならない。

パラメータの変化によりこのグリッドは自発的に振動を始める。振動のモードにはそれぞれ PW1, PW2 とよばれる 2 種類が観測されており、それぞれ Figure 2.3で示されるようなタイプの振動をしている。特に、 $x$  方向には強磁性的 (あるいは in phase) に、 $y$  方



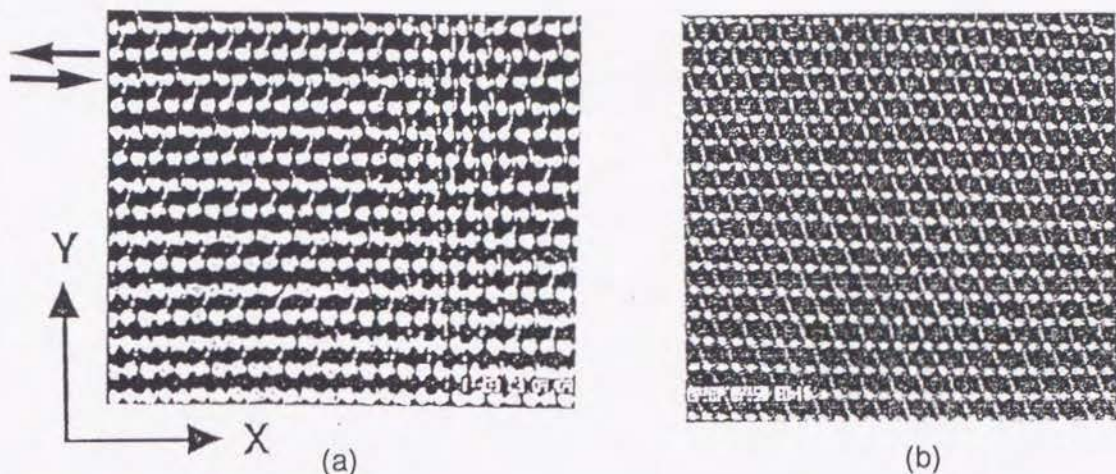


Figure 2.3: 振動グリッドパターン (a)PW1 モード (b)PW2 モード.

向には反磁性的 (あるいは anti phase) に並んでいる PW1 モードの形は後ほど重要になってくる. なお、PW1 モードを含んだ振動グリッドパターンを近似的に記述する関数は

$$U(x, y, t) = G_1 \cos(k_1 x + \phi_1) \cos(k_2 y + \phi_2) + G_2 \cos(\omega t + \psi) \sin(k_1 x + \phi_1) \sin(2k_2 y + 2\phi_2) \quad (2.3)$$

で与えられる. PW1 は PW2 と振動数が異なっている他に、ペースメーカーをつくるという特徴を持っている. この事実は (グリッドパターンのセルのサイズ) より巨視的なパターンとして如実に観測することができる. すなわち PW1 モードの位相波が巨大なターゲットパターンあるいはスパイラルパターンを形成することが報告されている [34]. 特にこのターゲットパターンは、局在し自発的に生成消滅を繰り返すという極めて興味深い性質を持っている. この現象に対しては理論・実験の両面から精力的な研究が行なわれている [3, 17, 35, 36, 37, 38, 39, 40].

我々の研究対象となる現象は、上述の PW1 モードの振動グリッドパターンにさらに周期外力を加えた場合に観測される PW1 モードの位相の飛びが形作る線状の欠陥である. 周期構造から自然に定義される位相が空間の各点において定義されるが、周期外力を加えた結果、振動の引き込み現象が起こる. その際位相の引き込まれる先が2種類あって、空間的にドメインを作る. そのドメインの境界が線状欠陥 (「ひも」) をつくるのだが、それは大きく分けて次の2つの特徴を持っている. 一つは構造に関する特徴で、端点を持つ「開いたひも」 (open string) と端点を持たない「閉じたひも」 (closed string) が安定に存在することである (Figure 2.4参照). 端点には必ず背景グリッドパターンのタイプ F の欠陥が観測されている (Figure 2.5参照). もう一つは、運動及びパターンに関する特徴である. 「ひも」の振舞いは与える周期外力の強度と振動数によって変化し、あるパラメータでは緩和的な振舞い、すなわち「閉じたひも」はつぶれ、「開いたひも」はあたかもその端点に引っ張られているかのごとく縮まった結果、端点同士を近似的に直線で結ぶ状態に落ち着く. 端点の運動は線状部分の運動に比べて極めてゆっくりしているか、ほとんど



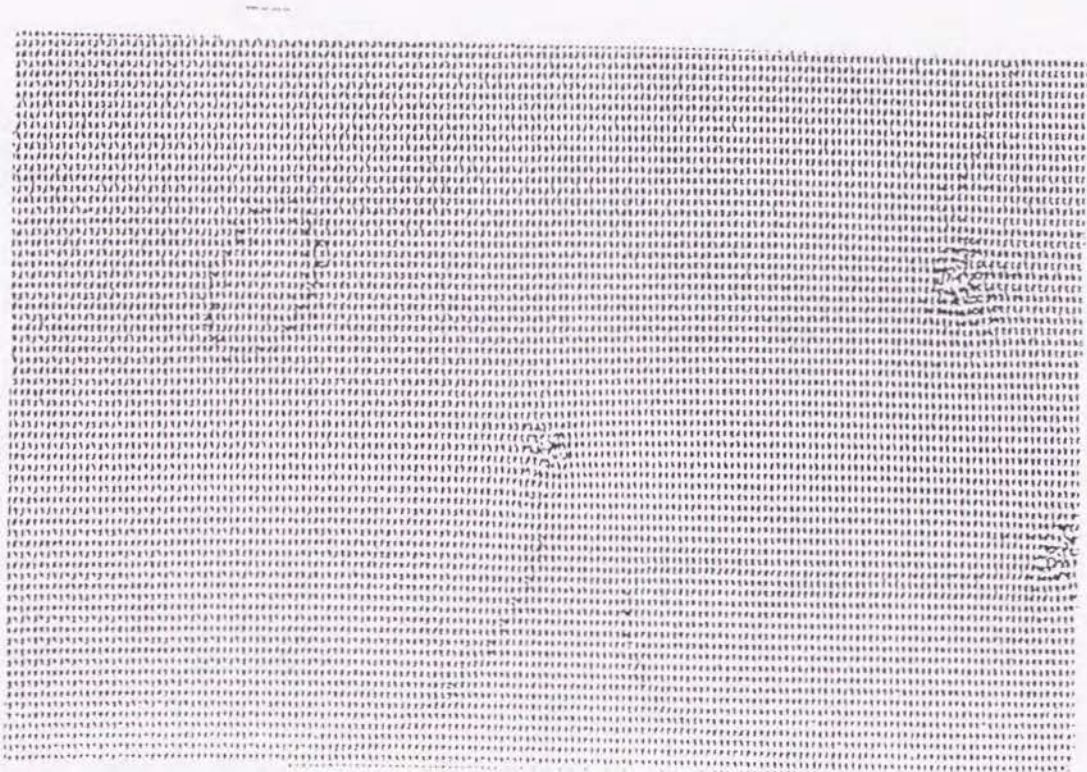


Figure 2.4: 「開いたひも」(中央の端点から下に伸びている)と「閉じたひも」(左上). 右にも端点が2つ見えている.

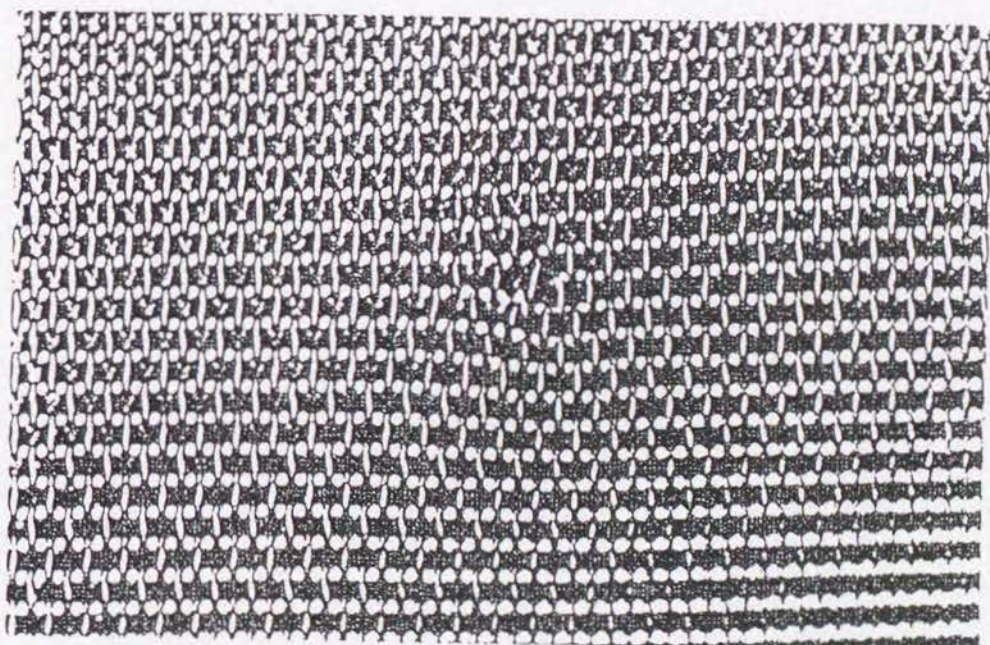


Figure 2.5: 「開いたひも」の端点付近の拡大図. タイプ F の欠陥が中央に見える.



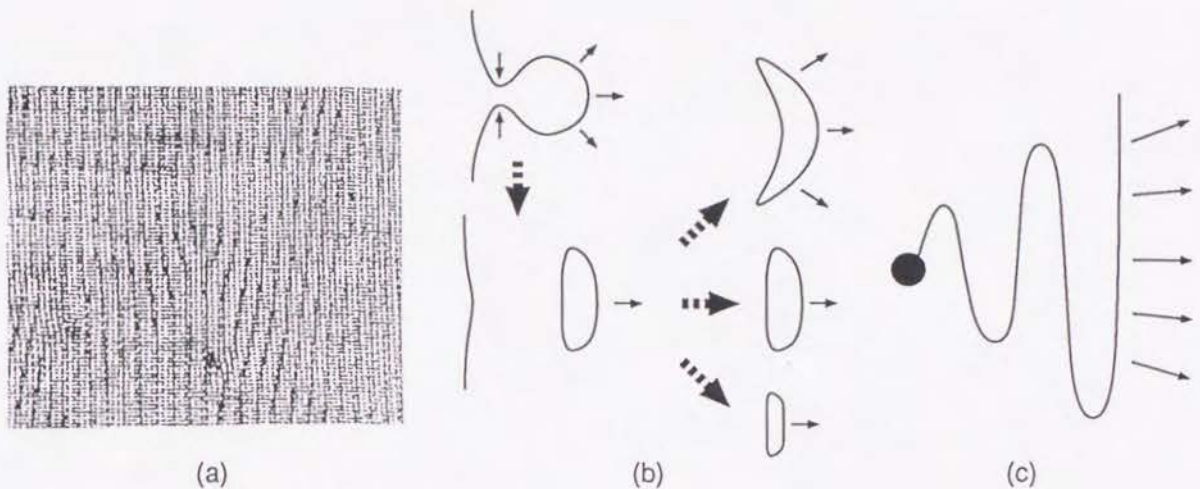


Figure 2.6: 「ひも」のつくる様々なパターンや動的状態: (a)「ひも」による縞模様 (stripe)、(b) 輪の生成と並進運動 (drifting ring)、(c) 波打ち運動 (swaying string). 輪の中には並進しながら大きくなるもの (上) や小さくなるもの (下) もある.

動かないかのいずれかである. ところがパラメータを変えると、「ひも」の振舞いは劇的に変化し、次にあげるようないくつかの典型的なパターンをつくる. その一つは「ひも」が縞模様 (stripe) をつくるというものである. 「ひも」のストライプは一本あるいは数本のひもが、幾重にも折れ曲がりをつくり空間全体を埋めつくす (Figure 2.6(a) 参照). この結果できる周期パターンは定常である. その波数選択過程は「ひも」自身の作る周期構造の欠陥の追放過程とも言える. もう一つの典型的なパターンはもっと動的なものである. 「ひも」の一部が螺旋波を生み出したり、「閉じたひも」が並進 (しながら広がっていったりつぶれたり) するもの (drifting ring) や、「開いたひも」が波打ち運動をおこなうもの (swaying string) が知られている (Figure 2.6(b)(c) 参照). この端点を持ち、周期構造を作ったりアクティブに動き回ったりする「ひも」の正体は一体なんだろうか. その正体を理解するために我々は以下の点に注目することにした.

1. 「ひも」の構造 ~なぜ端点を持ち得るのか~
2. 「ひも」の運動 ~どのように動くのか~

具体的には次の現象を再現・説明することが目的である.

- 構造: 端点を持つ「ひも」と持たない「ひも」
- 運動及びパターン: 緩和する「ひも」、周期構造をつくる「ひも」 (stripe)、飛ぶ輪 (drifting ring)、波打ち運動 (swaying string)

# Chapter 3

## Structure

2次元系において端点を持たない閉じた線、あるいは境界につながる線は例えば2つの相A Bの界面と解釈することができる。しかし、その界面は通常端点を持ち得ない。すなわち前章で紹介した「開いたひも」は従来の範疇に当てはまらない新しいタイプの欠陥と考えられる。この章ではこの「ひも」— 特に「開いたひも」— の構造に焦点を当てる。

### 3.1 端点の構造

実験において端点のある「開いたひも」が観測される時の系の物理的条件をまとめると次の4点となる。

- グリッドパターン
- グリッドパターンの欠陥
- 振動モード PW1
- 周期外力

これらの条件は「開いたひも」が現れ得るための必要条件であり、これらがいかに組合わさって「開いたひも」が出来るかを考察する。

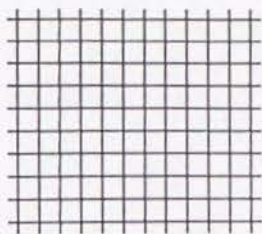
グリッドパターン 定常グリッドパターン  $U_0(x, y, t)$  は  $k_x, k_y$  で特徴付けられる2方向の周期構造を持っており、既に述べたように

$$U_0(x, y) = \frac{1}{2} G_1 (\cos(k_x x + k_y y + \phi_+) + \cos(k_x x - k_y y + \phi_-)) \quad (3.1)$$

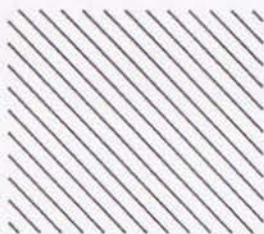
$$= G_1 \cos(k_x x + \phi_1) \cos(k_y y + \phi_2) \quad (3.2)$$

で良く近似される。以下、(3.1)を和の表示、(3.2)を積の表示と呼ぶ。パターンの具体的な関数形は本質的ではないが、簡単のためこの形を仮定する。これは  $x, y$  それぞれの方向

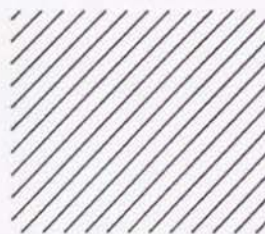




(a)



(b)



(c)

Figure 3.1: 定常グリッドパターンと和の表示で重ね合わされる斜めのロールの模式図。いずれも値0の等高線で、(a)グリッドパターン、(b) $\cos(k_x x + k_y y)$ 、(c) $\cos(k_x x - k_y y)$ 。

の連続的な空間並進対称性が破れているが、離散的な空間並進対称性が残っていることを示している。特に、変換

$$P_\pi : (\phi_1, \phi_2) \rightarrow (\phi_1 + \pi, \phi_2 + \pi) \quad (3.3)$$

に対して不変である。この変換  $P_\pi$  に関する不変性は2方向の周期性から出てくるグリッドパターン特有の性質である。

グリッドパターンの欠陥 次に、定常グリッドパターンに現れる点欠陥の分類を行なう。良く知られているように、2次元系における1次元周期構造に現れる欠陥は、次の式で定義されるトポロジカルな整数  $m$  によって特徴付けられることが知られている [28]。

$$2\pi m = \oint ds \nabla \phi(x, y) \quad (3.4)$$

ここで  $\oint$  は欠陥を囲む閉じた任意の経路に沿った積分であり、 $\phi$  は周期構造から自然に導入される位相である。整数  $m$  は欠陥の電荷と呼ばれている。実験で観測されているグリッドパターンの欠陥を同様に特徴付けることが出来るが、この場合2つの電荷が必要なことは2種類の周期構造があることから明らかである。例えば、グリッドを斜めのロールの重ね合わせと考えると、そこに現れる欠陥も斜めのロールの欠陥と対応がつく。すなわち、 $\phi_+$ ,  $\phi_-$  を積分して得られるトポロジカルな電荷を  $(m, n)_s$  で表すと前章で述べたタイプ F は  $(\pm 1, 0)_s$ 、あるいは  $(0, \pm 1)_s$  で、タイプ B は  $(\pm 1, \pm 1)_s$ 、あるいは  $(\pm 1, \mp 1)_s$  でそれぞれ特徴付けることが出来る (Figure 3.2 参照)。さて、この欠陥を積の表示の位相  $\phi_1, \phi_2$  で特徴付けるとどうなるであろうか。和の表示と積の表示の位相の間には次の関係が成り立つので、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\phi_+ + \phi_-}{2} \\ \phi_2 &= \frac{\phi_+ - \phi_-}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

積の表示の位相  $\phi_1, \phi_2$  に対する電荷を  $(m', n')_p$  で表せば、和の表示  $(m, n)_s$  の欠陥は積の表示で  $((m+n)/2, (m-n)/2)_p$  の電荷を持っていることに対応する。例えばタイプ F の欠

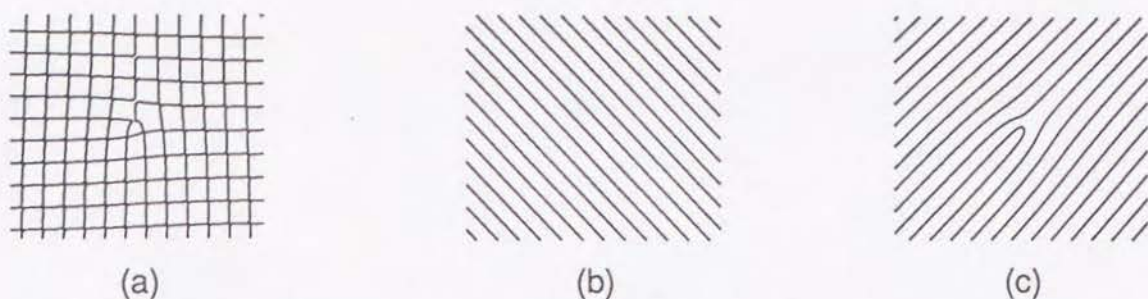


Figure 3.2: グリッドパターン上のタイプ F の欠陥と対応する斜めのロールの模式図. この場合は  $(0, +1)_p$ , すなわち  $(1/2, -1/2)_p$  で特徴付けられる.

陥は  $(\pm 1/2, \pm 1/2)_p$  あるいは  $(\pm 1/2, \mp 1/2)_p$  で、タイプ B は  $(\pm 1, 0)_p$  あるいは  $(0, \pm 1)_p$  で特徴付けられる. 半整数の電荷は奇妙に思われるかも知れないが、斜めの周期関数の和で表される物理量を  $x$  方向の周期関数と  $y$  の周期関数の積で表示するために半分ずつ振り分けられたものであり、観測量に不連続性などは出てこない.

振動モード PW1 しかし、振動モード PW1 が現れると事情は一変する. 既に述べた通り、PW1 モードの振動グリッドパターン  $U(x, y, t)$  は

$$U(x, y, t) = G_1 \cos(k_1 x + \phi_1) \cos(k_2 y + \phi_2) + G_2 \cos(\omega_1 t + \psi) \sin(k_1 x + \phi_1) \sin(2k_2 y + 2\phi_2) \quad (3.6)$$

で良く近似される. 第二項のうち  $\sin(k_1 x + \phi_1) \sin(2k_2 y + 2\phi_2)$  の部分は変換  $P_\pi$  に対しては不変ではなく、その符号を変えるという極めて重要な性質を持っている. これは実際の PW1 モードを含んだパターンからも容易に理解される. 変換  $P_\pi$  は  $x$  方向と  $y$  方向それぞれグリッドを一つずらすことに対応するが、以前にも述べたように PW1 モードは  $x$  方向には強磁性的 (あるいは in phase) に、 $y$  方向には反磁性的 (あるいは anti phase) に並んでいるのでちょうど逆の向きで重なるのである (Figure 3.3 参照). ところが、グリッドパターンにタイプ F の欠陥があった場合、その点欠陥を囲む任意の閉じた経路に沿って位相勾配を積分してやると、始点と終点は空間的に同じ点であるにも関わらず  $\cos(k_1 x + \phi_1) \cos(2k_2 y + 2\phi_2)$  の部分はその符号が変わってしまうのである. パターン  $U$  は同じ値をとらなければならないことから、 $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi)$  の部分が積分経路上で符号を奇数回変えなければならない. したがって  $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi)$  の零点が、積分経路上に奇数個存在することになる. このことが、そのタイプ F の欠陥を囲む任意の経路についていえることから、この経路を連続的に縮めることによって、そのタイプ F の欠陥から、 $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi) = 0$  で特徴付けられる線が奇数本出ていることがわかる. しかし、この線は単なる  $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi)$  の零点の集合であり、「ひも」になるための必要条件しか備えていない. なぜならば、実験で観測されている「ひも」は、それを特徴付ける  $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi)$  の変化が空間的に局在しているが、この場合、時間に関する位相  $\psi$  が空間的に滑らかに変化することによって、局在しない可能性があるからである. すなわち「ひも」が現れるた



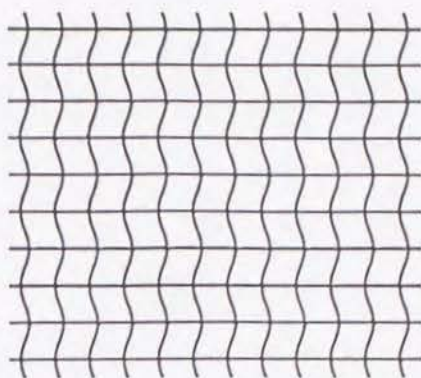


Figure 3.3: PW1 モードの振動グリッドパターンの模式図 ( $G_2 = \text{const.}$ )

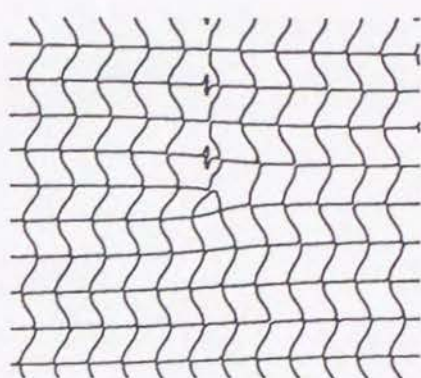


Figure 3.4: 端点付近の模式図. 中央の端点から PW1 モードの位相のずれた線が上に伸びている.

めには、その位相 $\psi$ を固定することが必要であり、そのためには次に述べる周期外力が必要なのである。

周期外力 これまでの議論で半整数電荷を持つ欠陥がの回りを1周すれば、振動モード PW1 の  $\cos(k_x x + \phi_1) \cos(2k_y y + 2\phi_2)$  の部分の符号が変わることから、その振幅  $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi)$  も1周した時にその符号を変えなければならないことがわかったが、そのずれが積分経路にどのように分布しているかを考えなければならない。今、PW1 モードに着目すれば系を振動媒質と考えることが出来る。振動数 $\omega_1$ の振動媒質に周期外力を加えた時の系の振舞いは、その周期外力の振動数 $\omega_e$ と $\omega_1$ の比、及び外力の強さによって異なり、振動数比が1:1のような単純な整数比に近い場合は、外力が十分強ければ系の振動は外力に引き込まれたものになることが知られている [41]。引き込まれる先は振動数比によってその数が異なるが、以下の議論には引き込まれる先が少なくとも1つあれば十分であり、その数にはよらない。その理由は、背景にある定常グリッドパターンの位相と振動する高調波の位相のロッキングに離散的な任意性が残っていることによるのだが、それについては次に述べる。さて、この時 PW1 モードの振幅  $G_2 \sin(\omega_1 t + \psi)$  の周期外力に引き込まれた位相を $\psi_*$ とすると、空間の各点々々が $\psi_*$ をとろうとした結果、それ以外の値を持つ部分は局在する。つまり、半整数電荷を囲む積分経路の大部分は $\psi_*$ に引き込まれており、引き込まれていない部分が局在化して「ひも」になるのである (Figure 3.4参照)。

さて、以上の議論を一般化する前に、定常グリッドパターンの位相と PW1 モードの位相の関係について述べなければならない。我々は定常グリッドパターンの位相と振動モード PW1 の位相が独立でなく、(3.6) 式で与えられること、すなわち、定常グリッドパターンを表す第一項の  $y$  方向の位相 $\phi_2$ と、振動する高調波を表す第二項の  $y$  方向の位相は、ちょうど後者が前者の2倍になっていることを仮定しているが、これらは本来独立であり、第一項の基本波と第二項の高調波の相互作用を採り入れた、より基本的なモデルのダイナミクスの帰結として得られるべきものである。ところが、その場合に第二項の  $y$  方向の位相を $\phi'_2$ とすると、 $\phi'_2 = 2\phi_2$ でロッキングした状態が安定ならば $\phi'_2 = 2(\phi_2 + \pi)$ とい

う状態も安定であることがわかる。このことは実現されるパターンを見ることによって直観的に理解できる。すなわち、Figure 3.3のPW1 モードと、それを  $y$  方向にセルを奇数個ずらしたPW1 モードは同等であり、一方が安定ならば他方も必ず安定であることがわかる。従って、共鳴外力により (3.6) 式で時間に関する位相  $\psi$  が単安定になっても、系は双安定なのである。

最後に、これまでの議論を一般化するための注意をまとめておく。第一はグリッドパターン及び振動モード PW1 の具体的な関数形は問題でなく、変換  $P_\pi$  に対する (反) 対称性が満たされれば十分なことである。(この場合は  $y$  方向に Fourier 変換して、グリッドパターンは奇数波成分、PW1 モードは偶数波成分だけから構成されていれば良いということがわかる。) 第二は位相変数は必ずしも 2 つなくても良いことである。なお、次節で行なわれる一般論で用いられる記法とこの節で持ちいられた物理量、変換等の対応は次の通りである。

	液晶対流系	一般論
周期構造	$U$	$U$
変換	$P_\pi : (\phi_1, \phi_2) \rightarrow (\phi_1 + \pi, \phi_2 + \pi)$	$P_\pi : \phi \rightarrow \phi + \pi$
振幅 1	$G_1$	$S$
振幅 2	$G_2 \cos(\omega t + \psi_*)$	$A$



### 3.2 一般論

この節では前節の議論を一般化し、端点を持つ線状欠陥がどのような場合に現れるかをトポロジカルな議論を通して明らかにする。

波数  $k$  を持つ周期パターンを  $U = U_0(kx + \phi)$  で表す。ここで、 $U_0(z)$  は  $z$  の周期  $2\pi$  の周期関数であり、 $\phi$  は空間並進対称性に関する位相で任意の定数である。今、変換  $P_\pi$  を  $P_\pi: \phi \rightarrow \phi + \pi$  で定義すると  $P_\pi^2 = 1$  より、 $P_\pi$  の固有値は  $\{1, -1\}$  であることがわかる。すなわち、 $P_\pi$  はある種のパリティを定義しており、それぞれの固有値に対応する固有状態を  $\pi$ -対称、 $\pi$ -反対称と名付ける。さて、周期パターン  $U$  中の  $\pi$ -対称モード  $U_S(kx + \phi)$  と  $\pi$ -反対称モード  $U_A(kx + \phi)$  が相互作用の結果、ダイナミカルに独立ではないとする。もっとも単純な例としては  $U_S(z) = \cos 2z$ ,  $U_A(z) = \cos z$  が考えられるが、以下の議論は関数の具体形には無関係に行なえる。 $U_S(kx + \phi)$ ,  $U_A(kx + \phi)$  を用いて周期パターン  $U$  を

$$U = SU_S(kx + \phi) + AU_A(kx + \phi) \quad (3.7)$$

と書く。ここで  $S$  及び  $A$  はそれぞれのモードの振幅を表す実数である。すると、パターン  $U$  が  $m$  を整数とする 2 種類の変換  $B_m: (\phi, A, S) \rightarrow (\phi + 2m\pi, A, S)$ 、 $F_m: (\phi, A, S) \rightarrow (\phi + (2m+1)\pi, -A, S)$ 、に対して不変であることがわかる。さて、変数  $(\phi^0, A^0, S^0)$  が表すのと同じパターンを与えるすべての  $(\phi, A, S)$  の集合を  $[(\phi^0, A^0, S^0)]$  で定義すると、オーダーパラメータ空間  $M$  は  $[(\phi^0, A^0, S^0)]$  の集合で定義される [28]。変換  $B, F$  に対する対称性から  $[(\phi^0, A^0, S^0)]$  の具体的な形は  $\{(\phi^0 + 2\pi\kappa, \epsilon A^0, S^0)\}$  で与えられる。ここで、

$$(\kappa, \epsilon) = (m, 1) \quad \text{or} \quad (m+1/2, -1) \quad (3.8)$$

である。ただし、 $S = A = 0$  の時、 $\phi$  は定義することは出来ないの、点  $S = A = 0$  はオーダーパラメータ空間から除かれなければならない。逆に言えば  $A = 0$  の時でも、 $\phi$  は非零の  $S$  によって定義することが出来ることを注意しておく。

さて、周期パターンの滑らかな変形を記述するために位相  $\phi$  と振幅  $A, S$  の 2 次元的な空間変化を考えてみよう。場  $(\phi(x, y), A(x, y), S(x, y))$  は孤立点を除いて実空間の中を連続的に変化する。ここでいう孤立点とは位相に関する特異点で次のように分類される。場  $(\phi(x, y), A(x, y), S(x, y))$  が点  $(x_0, y_0)$  で  $(\phi^0, A^0, S^0)$  という値をとっていたとする。この点を通る閉じた経路  $C$  に対して

$$(\phi', A', S') = (\phi^0, A^0, S^0) + \oint_C ds \nabla(\phi, A, S), \quad (3.9)$$

を定義する。 $\oint_C$  は積分経路  $C$  に沿った積分である。実空間の閉じた経路はオーダーパラメータ空間  $M$  のやはり閉じた経路に変換されるので  $[(\phi', A', S')] = [(\phi^0, A^0, S^0)]$  が成り立たなければならない。よって

$$(\phi', A', S') = (\phi^0 + 2\pi\kappa, \epsilon A^0, S^0), \quad (3.10)$$

が成立しなければならない。ただし  $(\kappa, \epsilon)$  は (3.8) で与えられる。この時、位相特異点はその点を囲む閉じた積分経路に対する  $(\kappa, \epsilon)$  の値によって分類される。 $\kappa$  が整数の位相特

異点の性質に関しては文献 [29, 30, 31] に詳しいが、 $\kappa$ が半整数の位相特異点の性質に関する研究はまだ少なく、次のような極めて興味深い性質を持っていることがわかる。 $\kappa$ が半整数の場合、 $\epsilon = -1$ になることを注意すると、実数振幅  $A$  はこのタイプの特異点を囲む経路  $C$  に沿ってその符号を変えるので、 $C$  上に零点を持たなければならない。この性質は  $C$  を連続的に縮めていっても変わらないことを考えると、 $A = 0$  で定義されるような線が奇数本このタイプの特異点から出ていることになる。2次元空間で一つの実数の場の零点がトポロジカルに安定なのは、その零点が一次元的な集合を作っている時であることを考えると、この  $A = 0$  で定義される線は  $S \neq 0$  の場合のみトポロジカルに安定であることがわかる。この事実はこの線状欠陥が存在するためには  $\pi$ -対称モードが必要であることを意味している。

さて、ここで  $A = 0$  の線の物理的な意味を考えてみよう。 $[(\phi, A, S)]$  の代表元として局所的に滑らかな場  $(\phi, A, S)$  を選べば、考えている線は二つの解  $\pm A_*$  を結ぶ界面に相当する。それに対し、別の代表元として  $A \geq 0$  であるような場を選べば、線  $A = 0$  を横切る時に位相が  $\phi$  から  $\phi + \pi$  へジャンプする (Figure 3.5 参照)。我々がパターンを観察する場合、位相の変化は認識しやすいが、振幅の変化は詳細な測定をして始めて認識されることを考えると、この線は「振幅の界面」というよりは「位相跳躍線」(phase jump line) といった方が適当であると思われる。

このような  $A$  場の零点の集合 (あるいは  $\phi$  場の跳躍線) と  $S$  場の点欠陥が組合わさった欠陥を、複合欠陥 (Hybrid type topological defect) と呼ぶ。なお、Sasa によって対称性の破れという観点からより進んだ議論がなされている [42]。



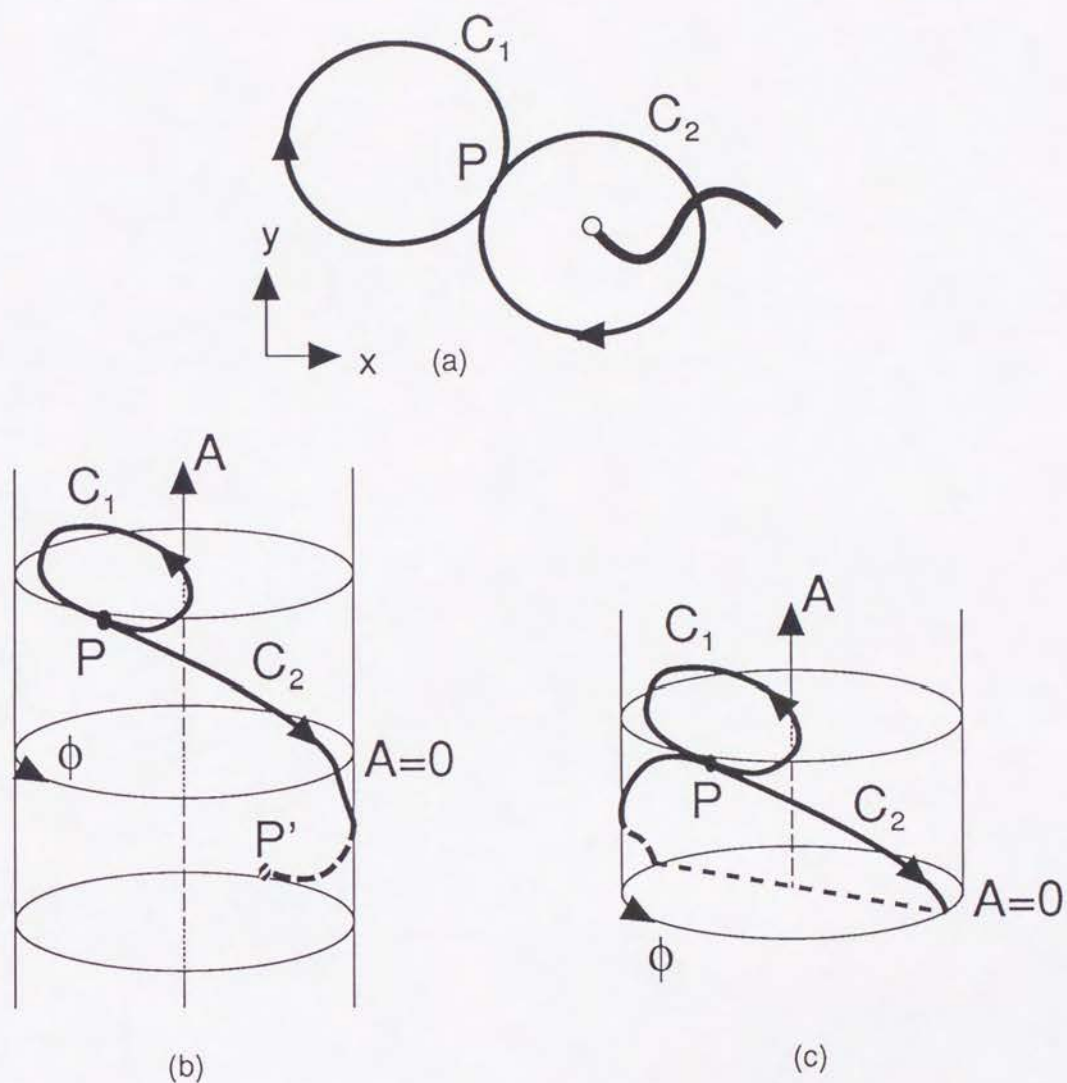


Figure 3.5: 実空間での積分経路とオーダーパラメータ空間での積分経路.  $C_1$ は欠陥を囲まない経路で、 $C_2$ は欠陥を囲む経路. (a) 実空間 ( $o$ は端点を表し、太実線は「ひも」を表す. )、(b) オーダーパラメータ空間 ( $A$  任意の場合)、(c) オーダーパラメータ空間 ( $A > 0$  とした場合). 簡単のため  $S$  場は図に描かれていないが、 $A = 0$  でも  $\phi$  が定義されていることに注意.

### 3.3 素過程

この節では「ひも」の素過程を分類する。この分類はトポロジカルな考察から来るものであり、実際にどのプロセスが起こるか(あるいは起こらないか)はダイナミカルに選択される。前節で明らかになったように「ひも」は  $A$  場の界面と  $S$  場の点欠陥が組合わさったものであるから「ひも」の種類は  $S$  場の点欠陥の電荷数とそれらの結び付き具合で分類される。もっとも単純な「ひも」は

- $S$  場に何もない「閉じたひも」
- $S$  場の点欠陥の対を結ぶ「開いたひも」

である。これとは別に「ひも」ではないが単純な欠陥として  $S$  場と  $A$  場にそれぞれ偶数値と整数値の電荷を持った点欠陥がある。

#### 3.3.1 生成消滅過程

第一の素過程として「ひも」の生成消滅過程を考える。複雑な「ひも」の生成消滅が 1 度に起こることは(特別なメカニズムでもない限り)一般的でないことを考えると、生成消滅の基本的な過程は次の 2 通りである。

- 「閉じたひも」が生成(消滅)する。このとき  $S$  場には変化がなく、 $A$  場には閉じた輪ができる(消える)(Figure 3.6(a) 参照)。
- 「開いたひも」が生成(消滅)する。このとき  $S$  場には(整数電荷の)点欠陥が対生成(消滅)し、 $A$  場にはそれらを結ぶ線ができる(消える)(Figure 3.6(b) 参照)。

#### 3.3.2 組変え過程

第二の素過程としては「ひも」の組変えがあげられる。これは「ひも」の一部と別の一部(必ずしも他の「ひも」でなくても良い)が接触し、分離合体した結果、「ひも」の構造が変化するというものである。通常「ひも」と「ひも」の接触は 1 点で起こるので<sup>1</sup>、その点の近傍だけに注目すればよい。具体的には接触する点の  $S$  場に着目することによって次の様な分類が出来る。無論、いずれの場合も過程の前後でトポロジカルな数の和は保存している。

- PP 型：接触する点では  $S$  場の 2 つの点欠陥が衝突、分離合体あるいは生成消滅している。 $A$  場で見れば端点と端点が衝突して組変えが起こっている (Figure 3.7(a) 参照)。
- PL 型：接触する点に  $S$  場の点欠陥は 1 つしかない。 $A$  場で見れば端点と界面部分が衝突して組変えが起こっている (Figure 3.7(b) 参照)。

<sup>1</sup> 沸騰の核膜転移のようなことはここでは考えていない。



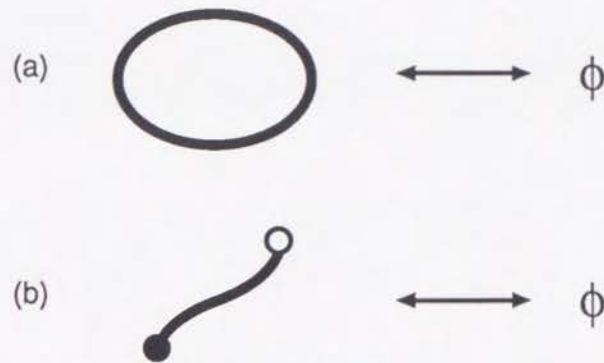


Figure 3.6: 素過程 1：生成消滅過程 (a)「閉じたひも」(b)「開いたひも」.  $\phi$ は複合型の欠陥がない状態を表す.

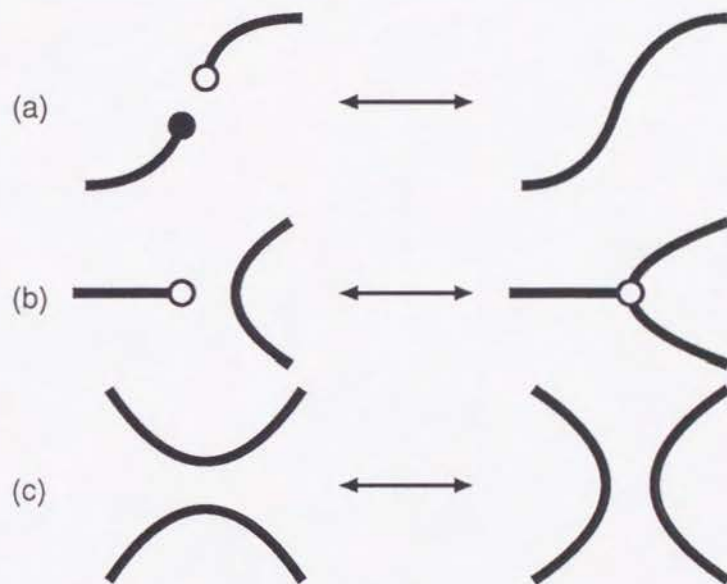


Figure 3.7: 素過程 2：組変え過程 (a)PP 型 (b)PL 型 (c)LL 型.

- LL 型： 接触する点に  $S$  場の点欠陥は存在しない.  $A$  場で見れば界面部分と界面部分が衝突した結果、組変えが起こっている (Figure 3.7(c) 参照).

それぞれの過程に関与する  $S$  場の点欠陥の電荷によってさらに詳しい分類が可能だが、ここでは省略する [43]. また、ここで述べた過程のうち、どの過程が実際に起こるか (あるいは起こらないか) は「ひも」のダイナミカルな性質から決定されるが、それはこの章の扱いを越える.

### 3.4 単純なモデル

本節では端点を持つ「ひも」を再現するような単純なモデルを紹介し、数値実験を通して実際に端点を持つ「ひも」が現れることを示す。もし位相特異点がなければ対称性を考慮することによって変数 $\phi$ ,  $S$ ,  $A$ に対する発展方程式は得られるが[36, 44, 45]、残念ながらこれらの方程式では「開いたひも」は再現することは出来ない。そのため我々は次の形の周期パターンから出発する。

$$U = W_1 e^{ikx} + W_2 e^{2ikx} + c.c., \quad (3.11)$$

ここで $W_1$ と $W_2$ はそれぞれ波数 $k$ と $2k$ の成分に対する複素振幅であり、 $c.c.$ は複素共役を表す。対称性を考慮することによって $W_1$ と $W_2$ に対する発展方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t W_1 &= (r_1 - g_1 |W_1|^2 - g_3 |W_2|^2) W_1 + \alpha W_2 \overline{W_1} + d_1 \Delta W_1, \\ \partial_t W_2 &= (r_2 - g_2 |W_2|^2 - g_4 |W_1|^2) W_2 + \beta W_1^2 + d_2 \Delta W_2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

与えられる。すべての係数は実数で $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ は異方性媒質における適当な空間結合である[46]。

同様の方程式で空間結合の項を除いたものは、波数 $k$ と $2k$ の二つのモードが同時に不安定になるような余次元2の分岐点近傍での共鳴相互作用を記述するための方程式として知られており[47, 48, 49]、パラメータによって様々なタイプの解があることが知られている。しかし、我々がここでやることは「閉じたひも」と「開いたひも」が存在することをデモンストレーションすることであって、解を分類することではない。簡単のため $g_3 = g_4 = \beta = 0$ とし、他のパラメータはすべて正の範囲に限定する。この時、方程式(3.12)は次の形の安定な一様解を持つ。

$$W_1 = \eta R_1 e^{i\phi}, \quad \text{and} \quad W_2 = R_2 e^{2i\phi} \quad (3.13)$$

ここで、 $\eta = 1$  または  $-1$  であり、 $\phi$ は定数、 $R_1$ と $R_2$ は非負の定数で次の条件を満たす。

$$r_1 - g_1 R_1^2 + \alpha R_2 = 0, \quad \text{and} \quad r_2 - g_2 R_2^2 = 0. \quad (3.14)$$

対応するパターン $U$ は次のように与えられる。

$$U = \eta R_1 \cos(kx + \phi) + R_2 \cos(2kx + 2\phi). \quad (3.15)$$

この系で「ひも」が再現されることを確認するために、方程式(3.12)の数値実験を行った。方法は単純Euler法で、時間及び空間ステップはそれぞれ0.1, 1.0とした。システムサイズは $50 \times 50$ で周期境界条件を課した。パラメータは次のように選んだ。 $r_1 = 2.0$ ,  $g_1 = 0.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $g_2 = 2.0$ ,  $d_1 = d_2 = 1.0$ 。初期条件は $W_1 = W_2 = 0$ に微小な擾乱を与えた。

発展の初期の段階ではランダムな初期条件が空間の各点で解(3.13)をとろうとする。しかし、解(3.13)で $\eta$ と $\phi$ が任意であることから、これらが空間の各点で異なる値をとっ



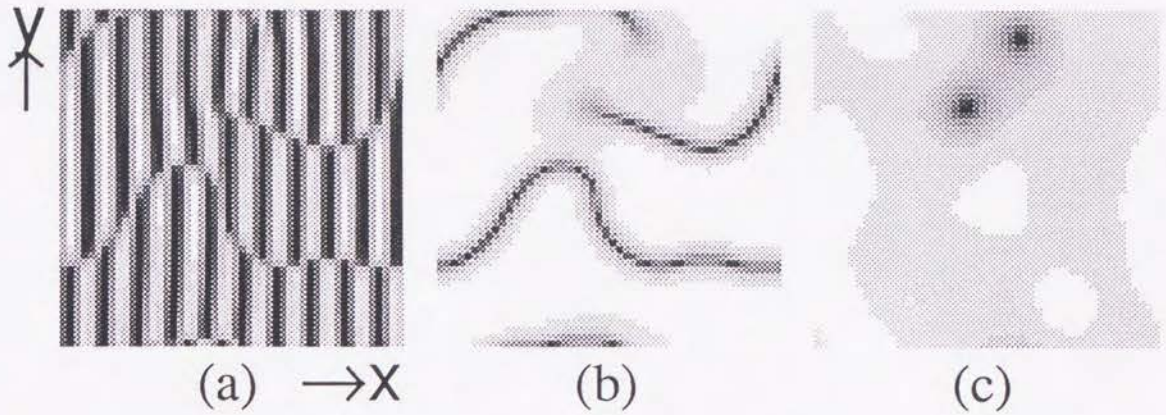


Figure 3.8:  $k-2k$  モデルによる「閉じたひも」と「開いたひも」. (a)  $U$ , (b)  $|A|$ , (c)  $|S|$ .  $T = 60$  におけるスナップショットで、白黒は値の高低を表す.

た結果、 $\eta$ の界面と位相 $\phi$ に関する特異点が形成される. もちろん $\eta$ の界面とは「ひも」のことである. 前述の議論と同様、位相特異点はそのトポロジカルな電荷 $\kappa$ によって分類することが出来る. 特に $\kappa$ が半整数の場合は $\eta$ がその特異点を囲む経路に沿って符号を変えなければならないので、その位相特異点は「ひも」の端点にならなければならない. それゆえ、 $W_1$ の零点は「ひも」に沿って伸びているが、 $W_2$ の零点は端点に孤立している.

Figure 3.8(a) は  $t = 60$  でのパターン  $U$  である. 2本の「ひも」が現れており一方は「開いたひも」で、他方は「閉じたひも」である. Figure 3.8(b) は「ひも」に対応する  $W_1$  場の振幅減衰であり、Figure 3.8(c) は「開いたひも」の端点に対応する  $W_2$  場の零点である. 2節の議論の結果と良く一致していることがわかる.

なお、このパターンのその後の時間発展は次のようなものである. 端点の運動は  $g_4 = \beta = 0$  という仮定から二つの渦の相互作用にしたがって運動した結果、端点对が衝突して消滅を起こし「開いたひも」が「閉じたひも」になる. これは素過程の PP 型に他ならない. さらに時間が立つと曲がった「ひも」は平均曲率に比例した力によって平坦になっていった結果、二本の「ひも」が平行に並ぶ. この状況での「ひも」の運動はその間に働く引力が距離の指数関数的に減衰するために極めてゆっくりしたものである. 十分長い時間の後に二本の「ひも」は互いにおつかった後規則正しい周期構造が現れる.



### 3.5 まとめ

我々は端点を持つ「開いたひも」の構造を明らかにすると共にそれを複合型 (Hybrid type) という新しいタイプのトポロジカルな欠陥として位置付けることに成功した。また  $k-2k$  モデルという比較的単純なモデルで「開いたひも」と「閉じたひも」を緩和過程の中に再現することに成功した。これは液晶対流系の実験で観測された「ひも」の端点を持つ仕組みを本質的にとらえているといつて良いであろう。また、将来  $k-2k$  モデルで良く近似されるような現象で「ひも」が観測されることが期待できる。しかし、次のような問題点は残されている。

最初の問題点は、実験で観測されるようなグリッドパターン上の「ひも」を再現できたわけではないということである。この問題は構成されるべきモデルの複雑さ（ひいては実験状況の複雑さ）から来るものである。なぜならば本来グリッドパターンは2種類のロールの重ね合わせから成り立っているが、それを記述するのに独立な複素変数が2つ必要である。グリッドの振動を表現するためにさらに複素変数を4つ合わせると、合計6つの複素変数の結合偏微分方程式になり、決定不能なパラメータの数はもはや我々の扱い得る能力を越えてしまうからである。（さらに周期外力が加わることを忘れてはいけない。）現在、もう少し単純なモデルとして定在波と高調波が相互作用する系も考えられている。

第二の問題はむしろこの章においてなされた「ひも」の構造自身が提起したとも言える。すなわち端点を除けば単なる界面であるはずの「ひも」がなぜ動的に振舞ったり周期構造を作ったりするのかという疑問である。Figure 2.6に見られるような、既知の界面で説明できない動的性質が端点によるものだけでないことは明らかである。なぜならば単なる界面であるはずの「閉じたひも」でさえも並進運動のような奇妙な振舞いを示すからである。実験で観測されている「ひも」の動的な振舞いは極めて複雑であり、本章で用いた  $k-2k$  モデル (3.12) では単純な緩和過程以外のアクティブな、あるいは周期構造を形成するような性質が表現できていない。無論  $k-2k$  モデルのすべてのパラメータを探索したわけではないが、数値実験の結果得られる「ひも」がそのような性質を定性的にでも再現するという可能性は低いと思われる。なぜならば実験の「ひも」の動的な性質は周期外力の強さと振動数に依存するにも関わらず、 $k-2k$  モデルには何らそのようなパラメータが入っていないからである。このため例えば周期外力を採り入れるような、より実験に近いモデルを作る必要がある。我々は次章でこの「ひも」の動的な性質に関する研究を紹介するが、そこでまさに振動媒質に周期外力をかけた場合をモデルとして採用する。

最後に「開いたひも」に関連すると思われる最近の研究結果を簡単に報告する。やはり、液晶を用いた系だが、いわゆる誘電領域での振動電場下のダイレクタの場が「開いたひも」を示すと言う実験結果がある [50]。ダイレクタには180度回転させても物理量が変わらないという基本的な性質があるので半整数の電荷を持った特異点は容易に作ることができる。このことからダイレクタ場は「開いたひも」を実現する単純な系としても有力視されている。また、LeeらやPangらも半整数のトポロジカルな電荷を持った特異点と線状欠陥に対する研究を述べている [51, 52]。端点の特解を求める試みもなされている [53]。



## Chapter 4

### Motion

本章では「ひも」の動的な性質を研究する。前章で明らかになったように「ひも」はその端点を除けば周期構造から自然に導入される位相 $\phi$ の、変換 $\phi \rightarrow \phi + \pi$ に対して不変であるような2つの安定状態を結ぶ界面である。すなわち実験で見られた「ひも」の様々な振舞いの端点によらない部分(特に「閉じたひも」の運動)は界面の運動としてとらえることができるはずである。しかし、実験で観測された「閉じたひも」の並進運動や、波打ち運動などの奇妙な振舞いは、既に知られている界面の運動からは想像しにくい。我々は実験で観測される「ひも」の動的な振舞いのメカニズムの一部は、端点の有無に関わらず界面の性質によって決まると仮定し、これらの運動やパターンを理解するための第一歩として、「閉じたひも」の動的な振舞いに関する研究を行なった。

界面の運動に関する研究は、双安定系の長時間的な振舞いを記述する上で極めて重要な役割を果たすことから、多くの人々によって古くから研究されている。最近の研究には、界面間の相互作用の性質を明らかにしたもの [54, 55]、ランダムな界面の運動から普遍的なスケーリング則を見出したもの [56]、負の表面張力で表される様な不安定性に関したものなどがある [57]。特に1次元系では高次元特有の曲率効果がないことを考えると、界面は静止しているか一様な速度で進行しているかのいずれかと思われる。実際、振動や 'breathing' といった複雑な運動に関する報告は稀である [58, 59]。しかし、今回我々が扱った系に現れる界面は振動を始めとする極めて多様に振舞うことが明らかになった。

界面が存在するためには系が双安定であることが必要だが、そのような双安定系としては実係数の Ginzburg-Landau (GL) 方程式で記述されるポテンシャル系や、Bonhoeffer-van der Pol (BvP) 型の方程式で記述される興奮性-抑圧性の系などが知られている [60, 61]。しかし、実係数の GL 方程式で記述される系は緩和的であり、実験で見られるような複雑な運動は得られそうにない。その点、BvP 的な系では既にいくつかの複雑な運動が報告されているが、端点を持つような系への拡張は難しい。

そこで、我々はモデルとして、振動媒質にその自然な振動数のほぼ2倍の振動数を持つ共鳴外力をかけた系を採用する。この系は上で述べた実係数の GL 方程式と違ってポテンシャル的ではないし、(時間的な周期構造から) 位相が自然に導入される。また、そこで得られた結果は端点を持つことができる、より複雑な系に対しても容易に拡張できるという利点を持つ。この系に関しては既にいくつかの理論的あるいは実験的な成果が得られ



ている。その主な結果は界面の Ising-Bloch 転移に関してであり、Coullet et al. に詳しい [41]。しかし、我々はその研究はまだ十分でなく、様々な可能性を持っていることを示すことができた。

実験と同じ 2 次元系の界面の運動を論ずる前に、我々は準備段階として一様状態に対する解析と 1 次元系に関する研究を行なう。その中で一様解の複雑な分岐構造や 1 次元系での振動する界面、時空間欠的な発展、引き込みの破れによる空間構造の形成などの新しい現象を発見した。また、2 次元系に関する研究では、1 次元系で得られた界面の性質を拡張するとともに、第 2 Ising-Bloch 転移ともいえるべき、新しい高次元的な効果を提唱し、実験で観測された「閉じたひも」の並進運動 (drifting ring) や、波打ち運動 (swaying string) といった奇妙な振舞いを定性的に説明する。興味深い界面の運動を発見した。

## 4.1 共鳴外力下の系

共鳴外力をかけた系は、回転磁場下のスピン系や表面波などをはじめとする様々な系で研究されている [41, 62, 63, 64]。我々がこの系をモデルとして取り上げた理由は、既に述べたように端点を持ち得る場合への拡張可能性や、液晶対流系の実験条件に基づいたものであるが、その振動数比をほぼ 1 対 2 に選ぶのは、もっとも単純な双安定系を実現するためである。液晶対流系の実験では振動数比が 1 対 1 の場合でも、「ひも」すなわち界面は現れるが、それは 3.1 節で述べたように、振動モード PW1 と背景にあるグリッドパターンとのロッキングに離散的な任意性が残っていることによる。しかし、本章で用いられるモデルは、簡単のため背景グリッドパターンの存在を無視し、一様振動媒質から出発するので、双安定系になるための条件として 1 対 2 の振動数比を仮定した。本節ではこのモデル、すなわち振動媒質にはほぼ 1 対 2 の共鳴外力をかけた系を記述する方程式を導出し、一様状態の解析を行なう。

### 4.1.1 モデル方程式

Hopf 分岐を起こした空間的に一様な系に振動数  $\omega_e$  の周期外力をかけた場合を考える。周期外力が十分大きければ振動は外力に引き込まれ、 $\omega_e$  との比が簡単な整数になるような振動数で振動することが予想される。特に今回我々は、 $\omega_e = 2(\omega_0 + \Delta)$ ,  $|\Delta| \ll 1$ , の場合を考える。ここで  $\omega_0$  は外力を切った場合の系の自然な振動数—これは Hopf 分岐のオンセット振動数とは一般に違い振幅補正の入ったものである—であり、 $\Delta$  は振動数  $\omega_e/2$  と  $\omega_0$  のずれを表す。ここで物理量  $Q$  が以下の形で表されるように空間及び時間的に緩やかに変化する複素振幅  $W$  を次のように定義する。

$$Q = W e^{i(\omega_0 + \Delta)t} + c.c. + h.o.t. \quad (4.1)$$

この時  $W$  の従う方程式は 1 次元系に対して次のようになる。

$$\partial_t W = (1 + i c_0) W + (1 + i c_1) \partial_x^2 W - (1 + i c_2) |W|^2 W + \gamma \bar{W} \quad (4.2)$$



$c_0, c_1, c_2$  は実数パラメータであり、 $\gamma$  は外力の強さを表す非負の実数である。 $\bar{W}$  は  $W$  の複素共役を表す。振動数のずれ  $\Delta$  は  $\Delta = c_2 - c_0$  で与えられる。

この方程式は次のような対称性を元にした議論から出すことができる [41]。物理量  $Q$  は (i) 空間反転対称性 (ii) 離散的時間並進対称性 (周期  $2\pi/\omega_e$ ) (iii) 連続的空間並進対称性を満たさなければならない。従って複素振幅  $W$  の満たす方程式は次のいずれの変換に対しても不変でなければならない。

$$x \rightarrow -x \quad (4.3)$$

$$x \rightarrow x + a \quad (4.4)$$

$$W \rightarrow W e^{2\pi i(\omega_0 + \Delta)/\omega_e} = W e^{i\pi} = -W \quad (4.5)$$

ここで  $a$  は任意の定数である。なお、実部及び虚部による表示、振幅と位相による表示は以後有用になるので上げておく。 $W = X + iY$  とすると、実部  $X$  虚部  $Y$  に対する方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t X &= X - (c_2 - \Delta)Y + \partial_x^2 X - c_1 \partial_x^2 Y - (X^2 + Y^2)X + c_2(X^2 + Y^2)Y + \gamma X \\ \partial_t Y &= (c_2 - \Delta)X + Y + c_1 \partial_x^2 X + \partial_x^2 Y - c_2(X^2 + Y^2)X - (X^2 + Y^2)Y - \gamma Y \end{aligned} \quad (4.6)$$

となり、 $W = A e^{i\phi}$  とすると、振幅  $A$  と位相  $\phi$  に対する方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t A &= A - A^3 + \gamma A \cos 2\phi + \partial_x^2 A - A(\partial_x \phi)^2 \\ \partial_t \phi &= c_0 - c_2 A^2 - \gamma \sin 2\phi + \frac{2}{A}(\partial_x A)(\partial_x \phi) + \frac{1}{A} \partial_x^2 \phi \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。

ここで、この方程式で記述される系の持つ対称性について述べておこう。外力がない場合に対応する複素 Ginzburg-Landau 方程式の持っていた  $W$  の位相に対する連続的な並進対称性は失われているが、次の変換に対する離散的な対称性は保たれている。

$$W \rightarrow -W = W e^{i\pi} \quad (4.8)$$

この変換は、まさに前章で定義した  $P_\pi$  に他ならない<sup>1</sup>。

#### 4.1.2 一様状態の解析

まず方程式 (4.2) の散逸項を無視することによって一様な状態の安定性を解析する。この時システムは 2 成分の常微分方程式 (4.9) になる。

$$\partial_t W = (1 + ic_0)W - (1 + ic_2)|W|^2 W + \gamma \bar{W} \quad (4.9)$$

この時、 $W = A e^{i\phi}$  とおいて得られる振幅・位相の方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t A &= A - A^3 + \gamma A \cos 2\phi \\ \partial_t \phi &= c_0 - c_2 A^2 - \gamma \sin 2\phi \end{aligned} \quad (4.10)$$

<sup>1</sup>主論文 [19] では、この対称性をカイラル対称性と呼んでいるが、これはあまり適当ではないと思われる [41]。1 次元キンク解に対するカイラル対称性は次節で定義される。

であり、 $W = X + iY$ とおいて得られる実部・虚部に対する方程式は

$$\begin{aligned}\partial_t X &= X - (c_2 - \Delta)Y - (X^2 + Y^2)X + c_2(X^2 + Y^2)Y + \gamma X \\ \partial_t Y &= (c_2 - \Delta)X + Y - c_2(X^2 + Y^2)X - (X^2 + Y^2)Y - \gamma Y\end{aligned}\quad (4.11)$$

となる。

固定点 固定点を求めるため、 $\partial_t = 0$ と置く。自明な固定点  $W = 0$ を除いて、固定点を  $W_0 = A_0 e^{i\phi_0}$ とすると、

$$A_0^2 = 1 + \gamma \cos 2\phi_0 \quad (4.12)$$

$$\sin(2\phi_0 + \tan^{-1} c_2) = -\frac{\Delta}{\gamma \sqrt{1 + c_2^2}} \quad (4.13)$$

が得られる。この解が存在するためには

$$\gamma > |\Delta| / \sqrt{1 + c_2^2} \quad (4.14)$$

$$A_0^2 = 1 + \gamma \cos 2\phi_0 > 0 \quad (4.15)$$

が必要十分である。(4.14)は $\Delta, \gamma, c_2$ に関して解けているが、(4.15)は解けていないので $\phi_0$ を含まない形にしなければならない。まず(4.14)を仮定すると $\phi_0$ には2つの解 $\phi_+, \phi_-$ があって、次の方程式を満たす。

$$\cos 2\phi_{\pm} = \frac{1}{\gamma(1 + c_2^2)}(-c_2\Delta \pm \sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}) \quad (4.16)$$

$$\sin 2\phi_{\pm} = \frac{1}{\gamma(1 + c_2^2)}(-\Delta \mp c_2\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}) \quad (4.17)$$

この時  $A^2$ は、

$$\begin{aligned}A_{\pm}^2 &= 1 + \gamma \cos 2\phi_{\pm} \\ &= \frac{1}{1 + c_2^2}(1 + c_2^2 - c_2\Delta \pm \sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2})\end{aligned}\quad (4.18)$$

で与えられる。これが正になるという条件(4.15)は、直接計算するよりも以下の方法で求める方がわかりやすい。 $A_{\pm}^2$ を解に持つ2次方程式を

$$(A^2)^2 + p(A^2) + q = 0 \quad (4.19)$$

とすると2次方程式の解と係数の関係より

$$p = -\frac{2(1 + c_2^2 - c_2\Delta)}{(1 + c_2^2)} \quad (4.20)$$

$$q = \frac{1}{(1 + c_2^2)^2}((1 + c_2^2 - c_2\Delta)^2 - (\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2)) \quad (4.21)$$



を得る．無論、判別式  $D_2 \equiv (p/2)^2 - q = (\gamma^2(1+c_2^2) - \Delta^2)/(1+c_2^2)^2$  は条件 (4.14) が満たされる範囲で正であり  $A^2$  が実数であることを保証している． $A_-^2 < A_+^2$  であることに注意すると、 $A_-^2, A_+^2$  の符号は次のように分類される．

$$\begin{cases} q < 0 & \text{のとき} & A_-^2 < 0 < A_+^2 \\ q > 0 \text{ かつ } p > 0 & \text{のとき} & 0 < A_-^2 < A_+^2 \\ q > 0 \text{ かつ } p < 0 & \text{のとき} & A_-^2 < A_+^2 < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

$A_\pm^2 > 0$  に対して原点に対称な二つの固定点  $W = \pm A_\pm e^{i\phi_\pm}$  が得られることに注意すると、自明でない固定点の数は以下の様にまとめられる．

•  $c_2\Delta < 1 + c_2^2$  の時、

$$\begin{cases} \gamma < |\Delta|/\sqrt{1+c_2^2} & \text{の場合} & 0 \text{ 個} \\ \gamma > |\Delta|/\sqrt{1+c_2^2} \text{ かつ } \gamma < \sqrt{1+(c_2-\Delta)^2} & \text{の場合} & \pm A_+ e^{i\phi_+}, \pm A_- e^{i\phi_-} \text{ の 4 個} \\ \gamma > \sqrt{1+(c_2-\Delta)^2} & \text{の場合} & \pm A_+ e^{i\phi_+} \text{ の 2 個} \end{cases} \quad (4.23)$$

•  $c_2\Delta > 1 + c_2^2$  の時、

$$\begin{cases} \gamma < \sqrt{1+(c_2-\Delta)^2} & \text{の場合} & 0 \text{ 個} \\ \gamma > \sqrt{1+(c_2-\Delta)^2} & \text{の場合} & \pm A_+ e^{i\phi_+} \text{ の 2 個} \end{cases} \quad (4.24)$$

以下、 $A_+, A_-$  の振幅を持つ固定点をそれぞれ外側、内側の固定点と呼ぶ．

固定点の線形安定性 次に、上の議論で得られた固定点の線形安定性解析を行なう．これには実部虚部表示  $W = X + iY$  が便利である．以下固定点を  $W_0 = X_0 + iY_0$  とし、これに微小な変位  $w = x + iy$  を加えたとする．(4.11) を  $x, y$  に関して線形化した方程式は次のようになる．

$$\partial_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

ただし、

$$B \equiv \begin{pmatrix} 1 + \gamma - 3X_0^2 - Y_0^2 + 2c_2X_0Y_0 & -c_2 + \Delta - 2X_0Y_0 + c_2X_0^2 + 3c_2Y_0^2 \\ c_2 - \Delta - 2X_0Y_0 - 3c_2X_0^2 - c_2Y_0^2 & 1 - \gamma - X_0^2 - 3Y_0^2 - 2c_2X_0Y_0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  とすると固有値  $\lambda$  は次の固有値方程式に従う．

$$|\lambda E - B| = \lambda^2 - (\text{tr} B)\lambda + \det B = 0 \quad (4.27)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr} B &= 2(1 - 2(X_0^2 + Y_0^2)), \\ \det B &= 1 - \gamma^2 + (c_2 - \Delta)^2 - 4c_2\gamma X_0 Y_0 + 2\gamma(X_0^2 - Y_0^2) \\ &\quad - 4(1 + c_2^2 - c_2\Delta)(X_0^2 + Y_0^2) + 3(1 + c_2^2)(X_0^2 + Y_0^2)^2\end{aligned}$$

さらに、 $\Delta, c_2, \gamma$  で表すと

$$\mathrm{tr} B = -\frac{1}{1 + c_2^2}(1 + c_2^2 - 2c_2\Delta \pm 2\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}), \quad (4.28)$$

$$\det B = \pm \frac{4\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}}{1 + c_2^2}(1 + c_2^2 - c_2\Delta \pm \sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}). \quad (4.29)$$

を得る。以下 (4.27) の 2 つの解を  $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) とし、これらを用いて前節で得られた各固定点の線形安定性を調べる。

### 1. 自明な固定点

まず、自明な固定点  $(0, 0)$  に対しては

$$\mathrm{tr} B = 0, \quad (4.30)$$

$$\det B = 1 - \gamma^2 + (c_2 - \Delta)^2 \quad (4.31)$$

$$\begin{cases} \det B > 0 & \text{ならば } \sigma_1, \sigma_2 > 0 \text{ すなわち } (0, 0) \text{ は source} \\ \det B < 0 & \text{ならば } \sigma_1\sigma_2 < 0 \text{ すなわち } (0, 0) \text{ は saddle} \end{cases} \quad (4.32)$$

となり、いずれの場合も不安定であることがわかる。ただし固定点が source から saddle に変わるための条件は内側の固定点の振幅が 0 になる条件と一致しておりこの時に原点で pitchfork 分岐が起こっていることがわかる。

### 2. 内側の固定点

次に、内側の固定点  $(X_-, Y_-) = (A_- \cos \phi_-, A_- \sin \phi_-)$  に対しては、

$$\begin{aligned}\det B &= -4\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}A_-^2 \\ &< 0.\end{aligned} \quad (4.33)$$

を得る。従って 2 つの固有値の実部の符号は異なり、いずれの場合も saddle であることがわかる。

### 3. 外側の固定点

最後に、外側の固定点  $(X_+, Y_+) = (A_+ \cos \phi_+, A_+ \sin \phi_+)$  を考える。

$$\begin{aligned}\det B &= 4\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}A_+^2 \\ &> 0.\end{aligned} \quad (4.34)$$



であり、2つの固有値の実部の符号は一致する。この符号は

$$\text{tr}B = -\frac{1}{1+c_2^2}(1+c_2^2-2c_2\Delta+2\sqrt{\gamma^2(1+c_2^2)-\Delta^2}) \quad (4.35)$$

の符号と一致するが、それを調べるためには、以下の方法が便利である。外側の固定点に対する行列  $B_+$  の跡  $\text{tr}B_+$  と内側の固定点に対する行列  $B_-$  の跡  $\text{tr}B_-$  を解に持つ2次方程式を

$$(\text{tr}B)^2 + p'(\text{tr}B) + q' = 0 \quad (4.36)$$

とすると、係数  $p', q'$  は

$$p' = 2(1+c_2^2-2c_2\Delta) \quad (4.37)$$

$$q' = (1+c_2^2-2c_2\Delta)^2 - 4(\gamma^2(1+c_2^2)-\Delta^2) \quad (4.38)$$

で与えられる。無論、判別式  $D'_2 \equiv (p'/2)^2 - q' = 4(\gamma^2(1+c_2^2)-\Delta^2)$  は条件(4.14)が満たされる範囲で正であり、 $\text{tr}B_{\pm}$  が実数であることを保証している。 $\text{tr}B_+ < \text{tr}B_-$  であることに注意すると  $\text{tr}B_+$  の符号は次のように分類される。

$$\begin{cases} p < 0 & \text{のとき} & \text{tr}B_+ < 0 \\ p > 0 \text{ かつ } q < 0 & \text{のとき} & \text{tr}B_+ < 0 \\ p > 0 \text{ かつ } q > 0 & \text{のとき} & \text{tr}B_+ > 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

結局、外側の固定点の線形安定性は次のようにまとめられる。

$$\begin{cases} 2c_2\Delta < (1+c_2^2) & \text{ならば} & \sigma_1, \sigma_2 < 0 & \text{i.e.} & \text{sink} \\ 2c_2\Delta > (1+c_2^2) \text{ かつ } \gamma > \sqrt{1/4 + (c_2/2 - \Delta)^2} & \text{ならば} & \sigma_1, \sigma_2 < 0 & \text{i.e.} & \text{sink} \\ 2c_2\Delta > (1+c_2^2) \text{ かつ } \gamma < \sqrt{1/4 + (c_2/2 - \Delta)^2} & \text{ならば} & \sigma_1, \sigma_2 > 0 & \text{i.e.} & \text{source} \end{cases} \quad (4.40)$$

となる。

Figure 4.1に安定性をまとめた。なお、それぞれの境界では次に挙げる局所的分岐が起こっている。(ただし、説明文中の「上下」は  $\gamma$  の大小に対応する。)

- SN —(saddle-node 分岐)：SN 線を上から下に横切ると、 $\text{saddle}W_-$  と  $\text{node}W_+$  がぶつかって固定点に対消滅する。
- H —(Hopf 分岐)：H 線を上から下に横切ると、 $\text{node}W_+$  の固有値が非零の虚数部を持ったまま正から負に変わる。
- PF<sub>-</sub> —(pitchfork 分岐)：PF<sub>-</sub> 線を上から下に横切ると、それまで saddle だった原点が saddle の対  $\pm W_-$  と source に変わる。
- PF<sub>+</sub> —(pitchfork 分岐)：PF<sub>+</sub> 線を上から下に横切ると、それまで saddle だった原点と source の対  $\pm W_+$  がぶつかって source に変わる。

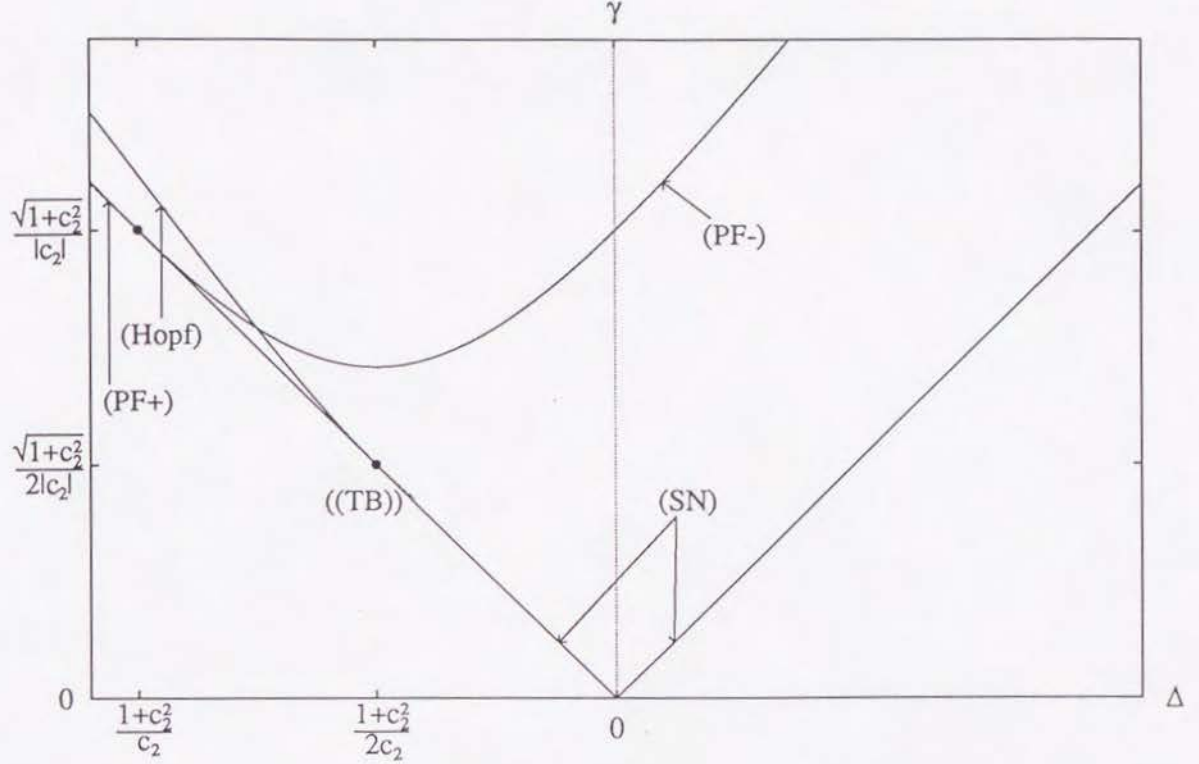


Figure 4.1:  $c_2$ を固定した時の解の局所的分岐図.

SN 分岐線より上かつ  $PF_+$  分岐線より上の領域、すなわち、

$$\begin{cases} c_2 \Delta \leq \frac{1+c_2^2}{2} \text{ のとき} & \gamma^2 > \frac{\Delta^2}{1+c_2^2} \\ c_2 \Delta > \frac{1+c_2^2}{2} \text{ のとき} & \gamma^2 > \frac{1+(2\Delta-c_2)^2}{4} \end{cases} \quad (4.41)$$

では、安定固定点の対  $\pm W_+$  が存在するので系は双安定となる。ただし、ここで固定点といっても実際の物理量は (4.1) で与えられるため、振動数  $\omega_0 + \Delta$  で振動していることに注意しなければならない。なお、点 TB は Hopf 分岐と pitchfork 分岐が同時に起こる余次元 2 の分岐点である [65]。ところが、ここで明らかにされた分岐はすべて局所的分岐であり、余次元 2 の分岐点近傍の解の分岐構造を調べるためにも、我々はリミットサイクル解と大域的分岐に着目しなければならない。

リミットサイクル解とその安定性および大域的分岐 前節で得られた Figure 4.1 の中の SN 分岐線より下の領域には安定なリミットサイクル解があるが、それは SN 線上で消えてなくなるとは限らない。言い換えれば saddle-node 分岐はリミットサイクルの直上で起こるのではなく、少しずれたところで起こる場合がある。そのため、このリミットサイクル解の安定性を論ずるには、大域的な分岐を考察しなければならない [65]。我々は 2 成分常微分方程式 (4.9) の数値計算によってリミットサイクル解の安定性と大域的分岐を調



べた。同時に TB 点付近の構造も調査した結果、3 種類、計 6 通りの大域的分岐が起こっていることを示した。数値実験は 4 次の Runge-Kutta 法 ( $dt = 0.01$ ) で行なった。初期条件は前節で解析的に求めた saddle  $W_s$  (PF 分岐線より上なら原点、PF 分岐線より下なら内側の固定点) の近傍の 2 点  $W_s \pm \epsilon$ ,  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-6}$  を選んだ。そこから時間に関して正方向と逆方向に発展させ、その軌道を観測することによって、相空間の中の流れを分類した。Figure 4.2 は  $c_2 = -1$  に固定して得られた典型的な解の分岐図である。

今まで得られた分岐ラインをすべて重ねて描いたものであり、極めて複雑な分岐構造を持っていることがわかる。各ラインで起こる大域的分岐は次のようなものである。Figure 4.3 に Figure 4.2 の分岐ラインで区切られたそれぞれの領域で見られる相空間  $W = X + iY$  の典型的なフローを描いた。各々の分岐については例えば文献 [65] を参照されたい。

- Hetero1 : Heteroclinic saddle connection
- Hetero2 : Heteroclinic saddle connection
- Hetero3 : Heteroclinic saddle connection
- Homo1 : Homoclinic saddle connection
- Homo0 : Homoclinic saddle connection
- LC : Limit cycle coalesce

ただし、LC の線は  $T = 400$  までに振幅  $|W|$  が 2.0 を越えなければ B 型、越えれば A 型という判定条件で引いた。なお、分岐線 Hetero2 及び Hetero3 の  $\gamma$  が小さいところでは、外挿の結果、非零の  $\gamma$  で SN 分岐線に衝突すると思われる。また、Hetero1、Homo1、Homo0 で表される大域的分岐は不安定なリミットサイクルの構造を変化させるだけでアトラクターの構造を変化させることはない。つまり実際に安定性が変化する分岐は SN、H、PF の 3 種類の局所的分岐と Hetero2、Hetero3、LC の 3 種類の大域的分岐である。次節以降で扱うのは主に  $\gamma < 0.5$  の領域であり、関係する分岐は SN だけである<sup>2</sup>。

<sup>2</sup>領域 B3, B5, C3, C5, C'5, E5 では、安定固定点対とリミットサイクル解が共存しており、系は双安定であると同時に振動的でもある。この様な系の振舞いには興味深いものがあるがここでは詳細に立ち入らない。

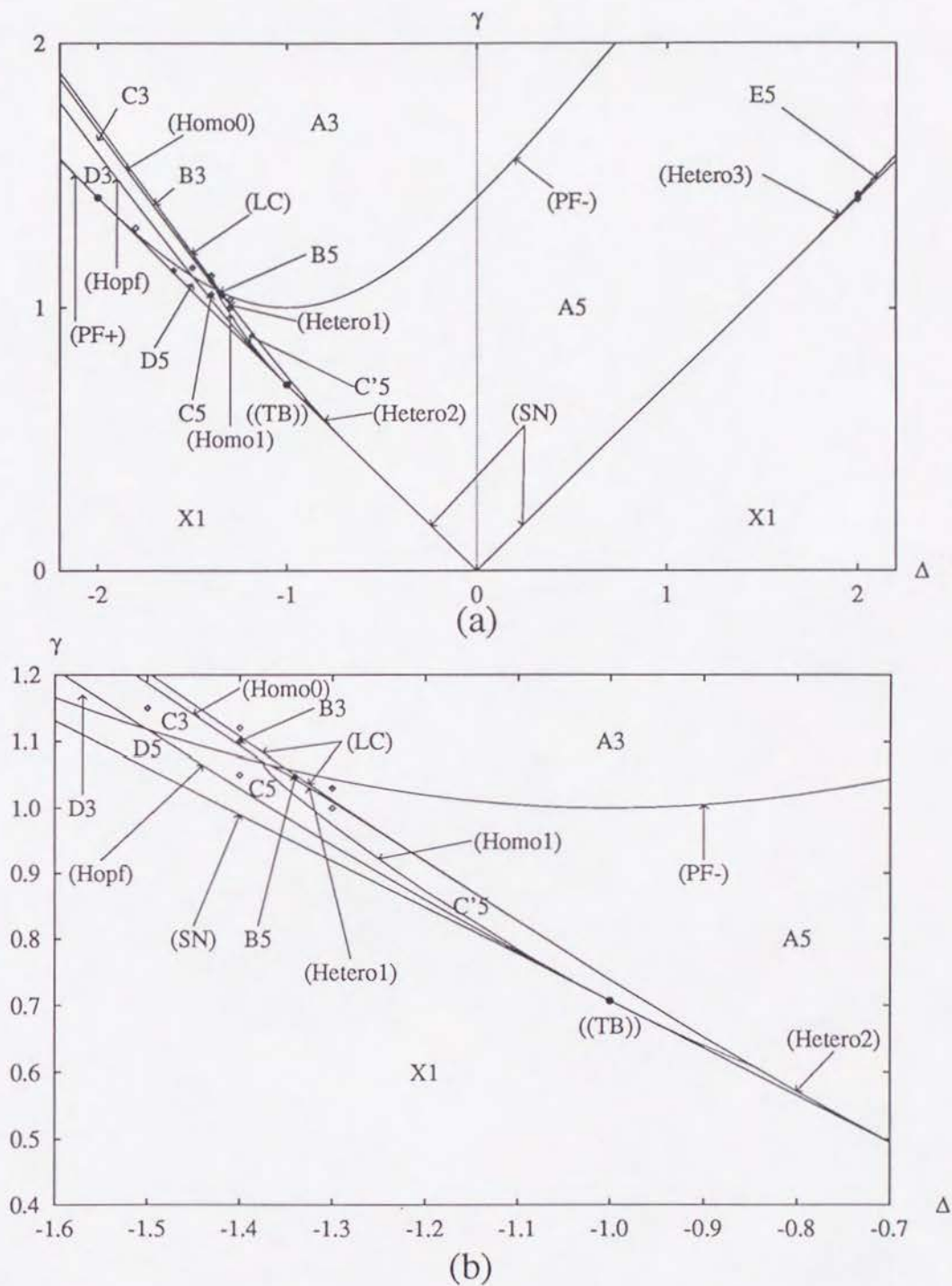


Figure 4.2: (a)  $c_2 = -1$  に対する解の分岐図と (b) その拡大図. 各分岐ラインで区切られたそれぞれの領域に、A3,A5,B3,B5,C3,C5,C'5,D3,D5,E5,X1 の記号をつけた (数字は固定点の数を表す). なお、それぞれの領域の中の○印の点の相空間のフローを Figure 4.3 に描いた.



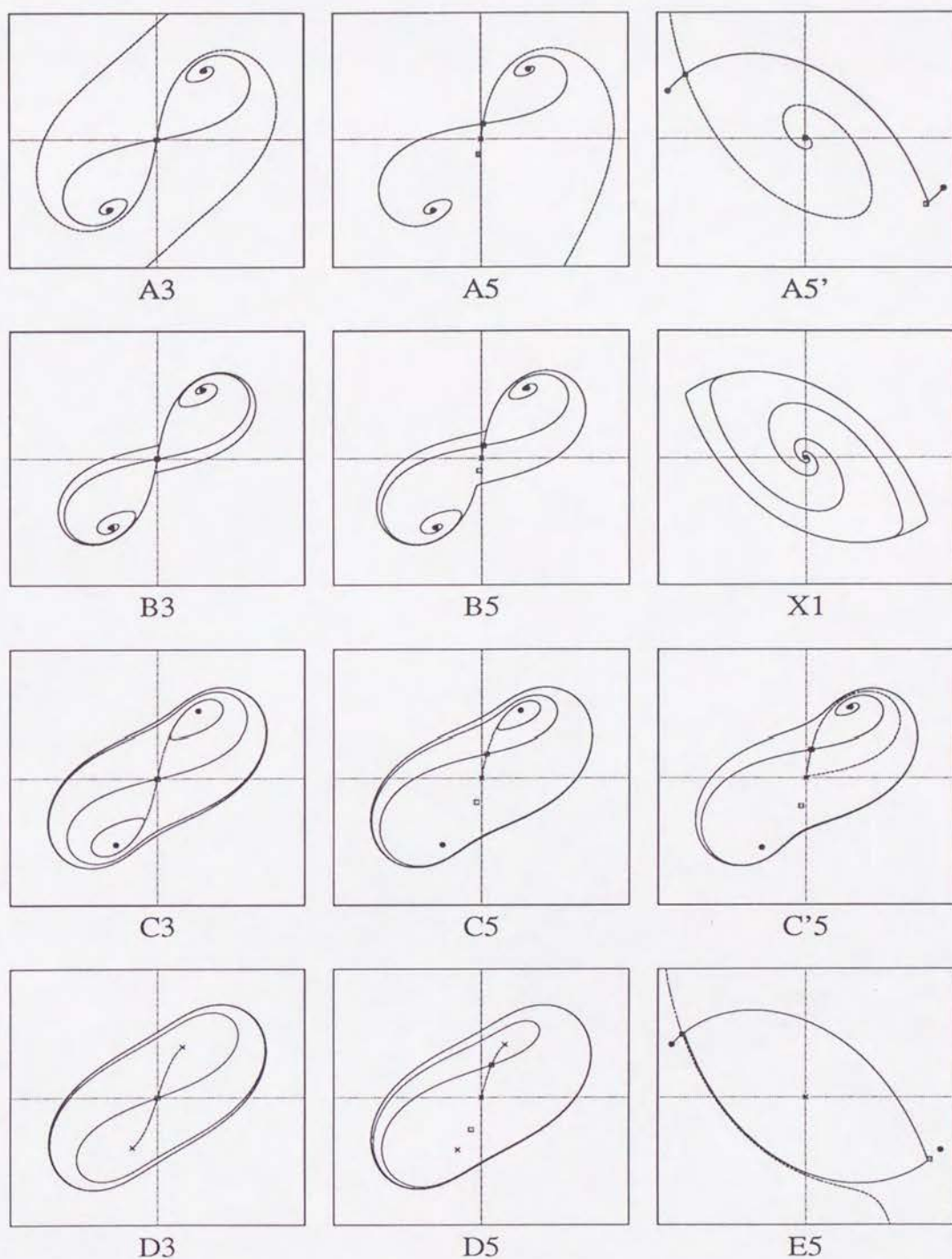


Figure 4.3: Figure 4.2 の各領域にある○印の パラメータで得られる  $W$ 空間でのフロー. 横軸は  $\text{Re}W = X$ (範囲 $-1.5 \sim 1.5$ )、縦軸は  $\text{Im}W = Y$ (範囲 $-1.2 \sim 1.2$ )を表し、(●)は sink を、(□)は saddle を、(×)は source をそれぞれ表す. また、実線は時間に関して正方向の軌道を、破線は負の方向の軌道を表す. A5 だけは 2 種類とった.

## 4.2 1次元系

本節では1次元系

$$\partial_t W = (1 + ic_0)W + (1 + ic_1)\partial_x^2 W - (1 + ic_2)|W|^2 W + \gamma \bar{W} \quad (4.42)$$

を考える. 4.2.2 節を除いて、パラメータは安定固定点对が存在するような場合、すなわち (4.41) が満たされていることを仮定する. この時、その安定固定点对を結ぶヘテロクリニック軌道に対応する界面解、すなわちキंक解が存在する. 単独界面に関するこれまでの研究では、Ising 型と Bloch 型という2種類の界面が知られていたが、我々は単独界面の振動現象を数値的に発見した. まず最初に既知の界面に関する解説を行ない、次に振動型の界面に関して述べる. 最後に複数界面が関与する現象と、引き込みの破れによる安定固定点对の消失の時に起こる現象についても述べる.

### 4.2.1 Ising 型界面と Bloch 型界面

まず、 $c_1 = c_2 = \Delta = 0$  の場合を考える. この場合、発展方程式は次のような変分方程式で与えられ、ポテンシャル系となる.

$$\begin{aligned} \partial_t W &= \frac{\delta}{\delta \bar{W}} \int \{ -(X^2 + Y^2) + |\nabla X|^2 + |\nabla Y|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)^2 - \gamma(X^2 - Y^2) \} \end{aligned} \quad (4.43)$$

このとき固定点对は、前節の結果より  $W_0 = \pm\sqrt{1+\gamma}$  となる. この固定点对を結ぶヘテロクリニック軌道に対応する界面解は2種類のものが解析的に求められており、一方は Ising 型、他方は Bloch 型と呼ばれている [41, 66, 67]. Ising 型の解は

$$W_I(x) = \pm\sqrt{1+\gamma} \tanh \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} x, \quad (4.44)$$

で、Bloch 型の解は

$$W_B(x) = \pm\sqrt{1+\gamma} \tanh \sqrt{2\gamma} x \pm i \frac{\sqrt{1-3\gamma}}{\cosh(\sqrt{2\gamma} x)} \quad (4.45)$$

で与えられる. (ただし、Bloch 型の解はキंक解と反キंक解を含めて4通りあることに注意.) この時、対称性の観点から見ると、1次元キंक解に対する次のような対称性を考えることができる.

$$\begin{cases} W & \rightarrow W e^{i\pi} = -W \\ x & \rightarrow -x \end{cases} \quad (4.46)$$

この対称性は、キंक解を  $W-x$  空間から  $W$  平面へ投影した時に、解が原点に対称か否かを表しており、以後、この対称性を1次元キंक解に対するカイラル対称性と呼ぶ. Ising 型がこの1次元キंक解に対するカイラル対称性を保っているのに対して、Bloch 型がそれを破っているのは明らかである<sup>3</sup>. また、パラメータ  $\gamma$  によってその間の安定性が

<sup>3</sup>Ising 型はその中心で位相が  $\pi$  だけ不連続に変化しているが、Bloch 型の位相の変化は連続的である. そのため、厳密な意味での位相の不連続性は Bloch 型の界面にはない.



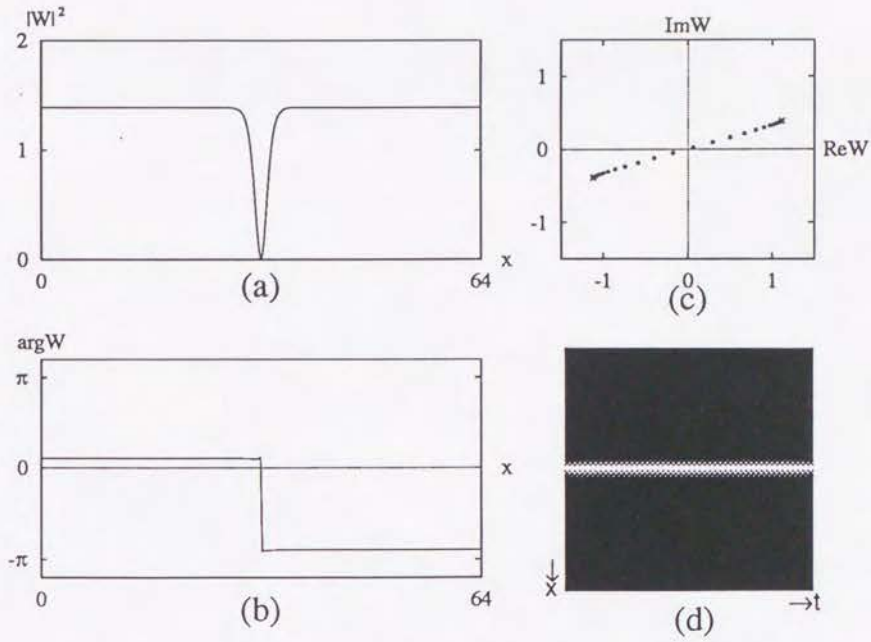


Figure 4.4: 非変分効果が弱い場合の Ising 型界面. (a) 振幅、(b) 位相、(c)  $W$  平面への投影で、いずれも  $T = 100$  でのスナップショット. (d) は  $T = 100$  から  $T = 200$  までの振幅の絶対値の時空パターンで、黒いところは  $|W|$  が大きく、白いところは  $|W|$  が小さい.

入れ替わることもわかっており、 $\gamma > \gamma_c \equiv 1/3$  の場合 Ising 型の解が実現される [41].

Coullet らは非変分効果が弱い、すなわち  $|c_1|, |c_2|, |\Delta|$  が小さいが非零の時の Ising 型と Bloch 型の間で起こる転移に関する研究をおこなっている [41, 62]. この転移は実数のオーダーパラメータを定義するが、彼らは Bloch 型の界面がそのオーダーパラメータに比例した一定速度で動くことを示した. 典型例を Figure 4.4, 4.5 にあげる<sup>4</sup>. 数値計算には、時間及び空間ステップ  $dt = 0.01, dx = 0.25$  の Crank–Nicholson 法を用い、自由境界条件を課した. システムサイズは  $L = 64.0$ . 初期条件は単独界面の振舞いを見るため、系の中央に界面を 1 つ置く、すなわち

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_0 + \eta & \text{if } x > L/2 \\ -W_0 + \eta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.47)$$

で与えた. ただし、 $\eta$  は微小な擾乱である. Figure 4.4 の Ising 型界面は、パラメータを  $c_1 = -0.1, c_2 = 0.1, \Delta = 0.25, \gamma = 0.5$  にとり、Figure 4.5 の Bloch 型界面は、 $\gamma$  だけを 0.4 に変更した. Bloch 型界面の振幅、位相のプロファイルを注意深くみると、左右対称ではないことがわかるが、そのことは  $W$  平面への射影でさらに良くわかる. すなわち、右上の固定点と左下の固定点を結ぶヘテロクリニック軌道が●印と+印の 2 種類あるが、その各々が、変換  $\phi \rightarrow \phi + \pi$  に対して不変でなくなっている、すなわち、1 次元キंक解に対

<sup>4</sup>一様状態の解析のところでも述べたが実際の物理量は (4.1) で与えられるため、振動数  $\omega_0 + \Delta$  で振動していることに注意しなければならない.

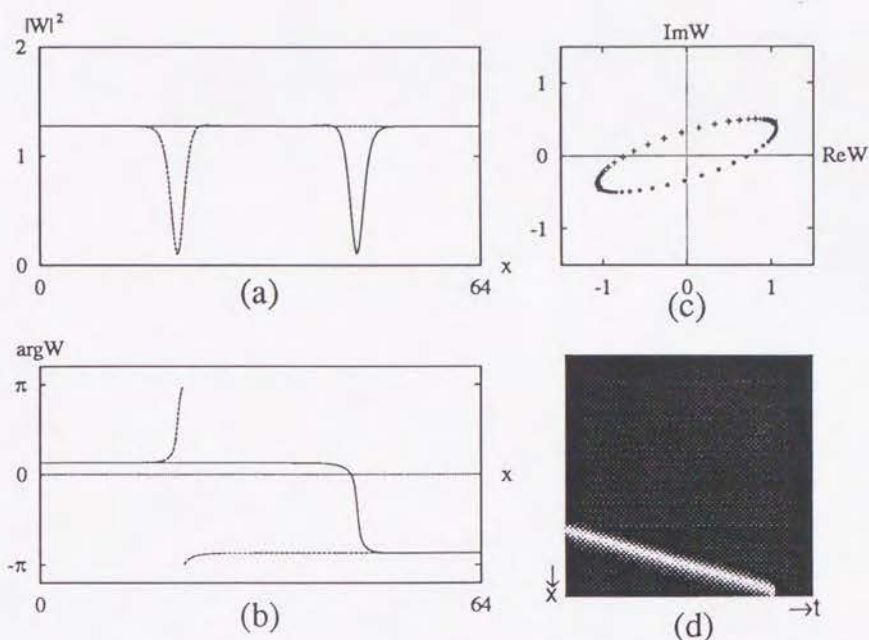


Figure 4.5: 非変分効果が弱い場合の Bloch 型界面. (a) 振幅、(b) 位相、(c)  $W$  平面への投影、(d) 時空パターン. 条件はパラメータ  $\gamma = 0.4$  を除いて Figure 4.4 と同じ. ただし、(a)(b) の実線及び (c) の  $\bullet$  印は (d) の時空パターンの  $T = 100$  に対するスナップショットであり、(a)(b) の点線及び (c) の  $+$  印は乱数を変えて異なる初期条件から出発したものである. 後者は逆方向に動く.

するカイラル対称性 (4.46) を破っているのである. もちろん対をなすことによって不変性は保たれており、このうち一方が初期条件によって選ばれるのである.

#### 4.2.2 振動型界面と投影 $\chi$

以降の節では非変分効果のより強い場合に得られた我々の研究結果を述べる. (4.42) 式の数値実験においてパラメータをより広く振った結果、興味深い時空パターンがいくつか観測された. 中でも様々な形で振動する界面や時空間欠的な発展などはそれまでの界面に関する研究ではほとんど見られなかった現象である.

まず、振動界面に関して述べる. 典型的な一例として  $c_1 = -0.5, c_2 = 1, \Delta = 0$  に固定し、 $\gamma$  を 0.28 から下げていった時に得られるパターンを見てみよう. 数値実験の方法は Crank-Nicholson 法で時間及び空間ステップはそれぞれ 0.0025, 0.25 とした. 界面の構造が重要になるので空間ステップはあまり大きくとれない. システムサイズ  $L$  は、パラメータによって界面の運動が変化するのでそれぞれの場合に応じて適当な値をとった (各 Figure の説明文参照). 特に Bloch 型のようにドリフトする界面を見るためには、ある程度システムサイズを大きくとる必要があるが、最初は  $L = 64.0$  とした. また境界条件は単独界面の運動を見るために自由境界条件を課し、初期条件は (4.47) で与えた. Figure 4.6(a) に見られる通り、 $\gamma = 0.28$  では静止した Ising タイプの界面が形成される. しかし、



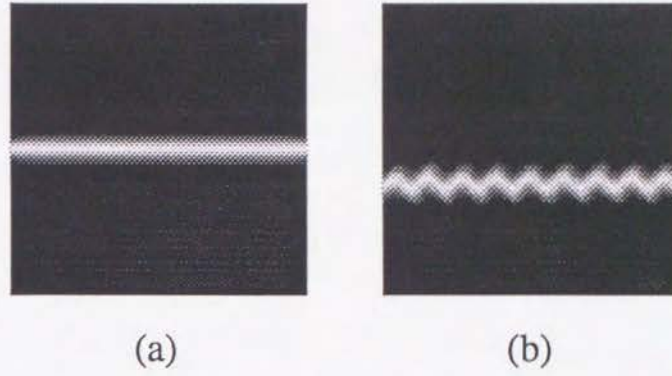


Figure 4.6: 非変分効果が強い場合の (a)Ising 型界面と (b) 振動型界面の振幅の絶対値の時空パターン. 表示方法は Figure 4.4 と同じ. いずれも  $T = 100$  から  $200$  までの発展でシステムサイズは  $L = 64.0$ . パラメータは  $c_1 = -0.5, c_2 = 1, \Delta = 0$ . (a) $\gamma = 0.28$ , (b) $\gamma = 0.24$ .

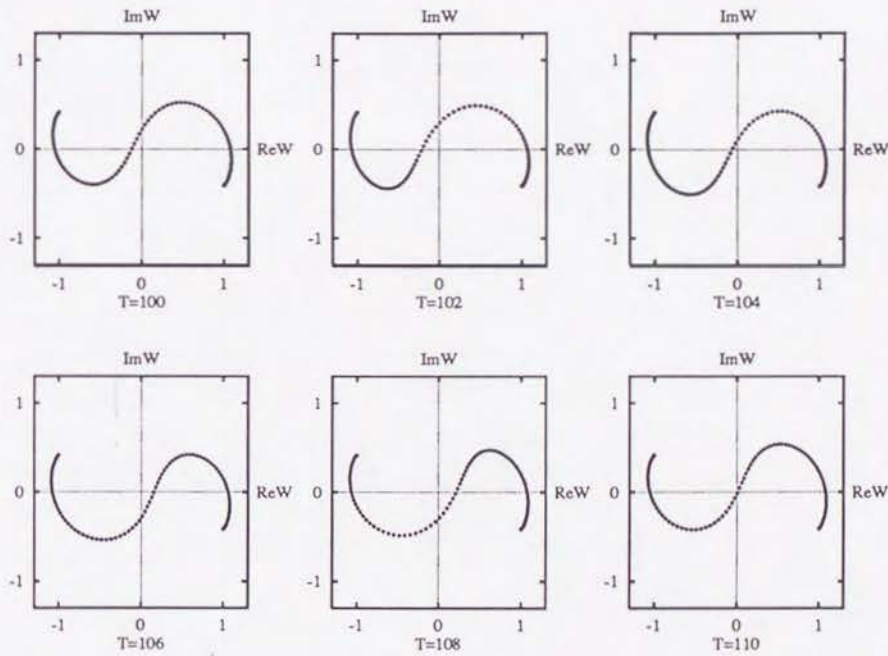


Figure 4.7:  $W$ 平面へ投影された振動型界面の運動. Figure 4.6(b) に対するスナップショット.

0.27 まで  $\gamma$  が下げられると界面は正弦波的な振動を始める.  $\gamma$  を下げるに従って軌跡の振動の振幅は大きくなる. Figure 4.6(b) は  $\gamma = 0.24$  での時空パターンである. 振動型界面は静止した Ising 型と違って Figure 4.7 に見られるように周期的にその形を変えていることがわかる.

この静止界面から振動型界面への分岐のタイプを特定するために我々は界面の形を

特徴付ける量として積分 $\chi(t)$ を導入した.

$$\chi(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} W(x,t) \Psi(x,t) dx, \quad (4.48)$$

ここで、

$$\Psi(x,t) \equiv |W_0|^2 - |W(x,t)|^2. \quad (4.49)$$

$\Psi(x,t)$  は界面の近傍にだけ重みを持つ重み関数であるが、次の性質を持つものなら何でも良い. (i) Ising 型に対して偶関数であること (ii) 界面の近傍で値を持ち、無限遠で漸近的にゼロに近付くこと. この時 $\chi(t)$  は Ising 型の解からのずれを表すことになる. 力学系の言葉でいえば $\chi(t)$  は無限次元の相空間から二次元空間への一種の投影になっており、界面の運動に対応する力学系の流れを見ることが出来る.

この $\chi$ 平面に投影されたアトラクターの変化を見ることによって、分岐のタイプを特定することができる. Figure 4.8はそれぞれ Ising 型、振動型の界面に対応する $\chi$ 平面の軌道である.  $\gamma = 0.28$  に対しては $\chi$ は常に零であり界面が Ising 型であることを示している. それに対して、 $\gamma = 0.24$  になると、原点对称なリミットサイクルが現れていることがわか

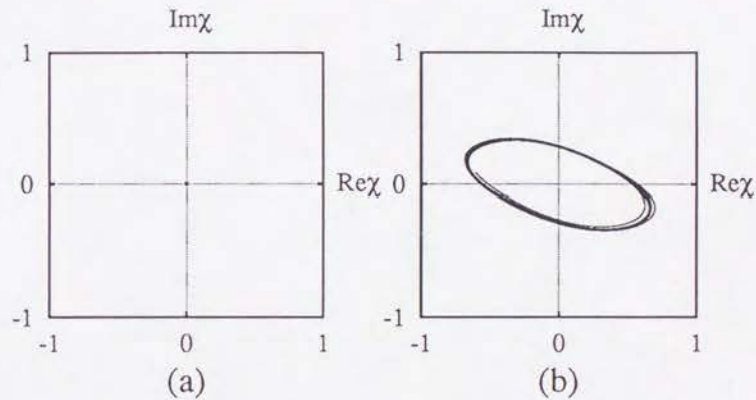


Figure 4.8: Ising 型と振動型の界面に対する $\chi$ の振舞い. (a)(b) はそれぞれ Figure 4.6 の (a)(b) に対応する.

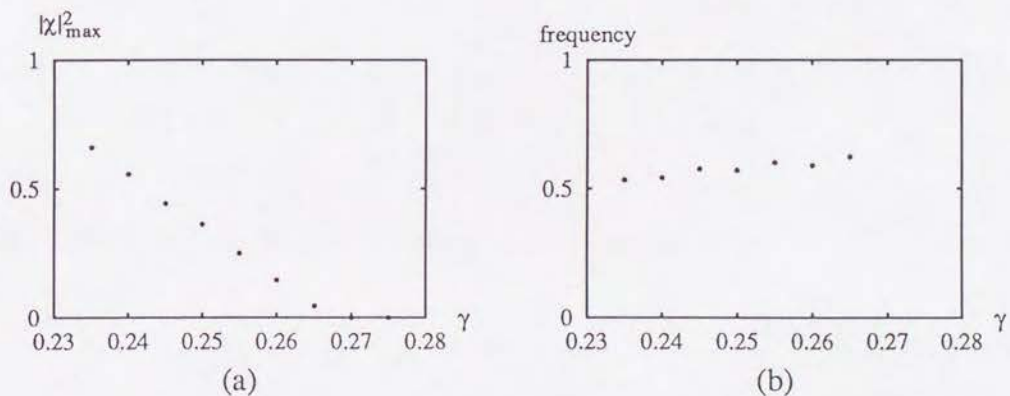


Figure 4.9: 転移点近傍での $\chi$ の振幅  $|\chi|_{\max}^2$  と振動数の振舞い.



る. Figure 4.9は分岐点付近のリミットサイクルの長半径の自乗  $|\chi|_{\max}^2$  と振動数をプロットしたのだが、 $|\chi|_{\max}^2$  が臨界点  $\gamma_c \sim 0.27$  からの距離  $\gamma_c - \gamma$  に比例しているが、その間  $\omega$  がほとんど変化していないことから Hopf 分岐が起こっていることがわかる.

さて、さらに  $\gamma$  を下げていくにしたがって、界面のより複雑な運動が観測されている. しかしこの時も  $\chi$  を測ることによってアトラクターの形とその間の分岐を特定することが可能である.  $\gamma$  以外のパラメータは固定したまま (すなわち  $c_1 = -1.0$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $\Delta = 0$ ) で  $\gamma$  をさらに小さくしていくと  $\gamma = 0.20$  では、界面の軌跡は我々が「二重振動型」と名付けた複雑な運動をする. 対応するアトラクターは二重構造のリミットサイクルである (Figure 4.10参照). このパラメータでは正弦波型と二重振動型の二種類の界面が安定に共存することもわかっており、これは亜臨界倍周期分岐が起こっていることを示すものである.  $\gamma = 0.18$  では界面は振動しながらドリフトする. このドリフト運動の方向は初期

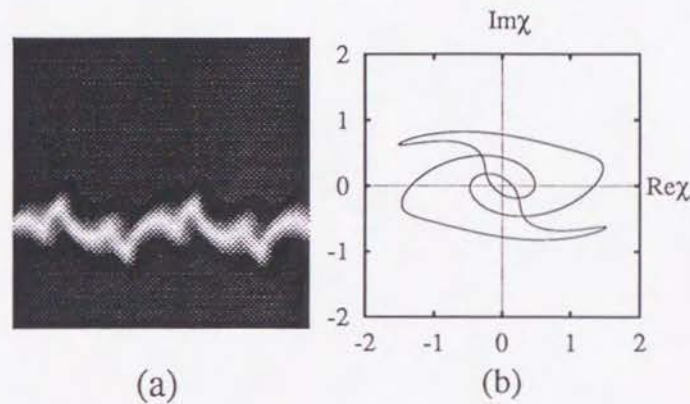


Figure 4.10: 二重振動型の界面の (a) 時空パターンと (b)  $\chi$  平面での軌道. パラメータ等の条件は Figure 4.6 と同じ. ただし  $\gamma = 0.20$ .

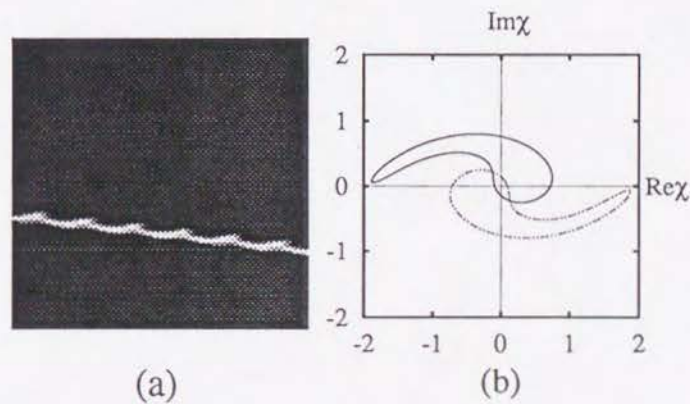


Figure 4.11: 振動しながらドリフト運動をする界面の (a) 時空パターンと (b)  $\chi$  平面での軌道. パラメータ等の条件は Figure 4.8 と同じ. ただし  $\gamma = 0.18$ 、システムサイズは  $L = 256.0$ . (b) の実線は (a) に対応しており、点線は異なる初期条件から出発して得られた逆方向に進行する時空パターンに対応する.

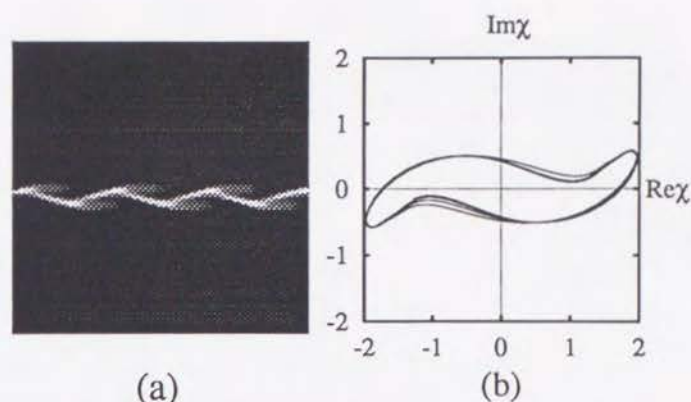


Figure 4.12: ジグザグ運動をする界面の (a) 時空パターンと (b)  $\chi$  平面での軌道. パラメータ等の条件は Figure 4.11 と同じ. ただし  $\gamma = 0.09$ .

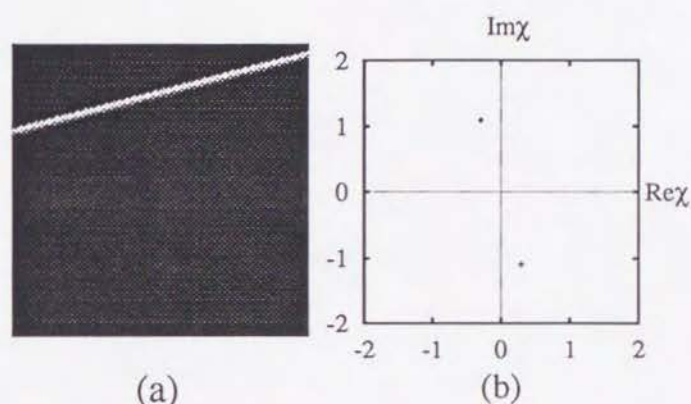


Figure 4.13: Bloch 型界面の (a) 時空パターンと (b)  $\chi$  平面での軌道. パラメータ等の条件は Figure 4.11 と同じ. ただし  $\gamma = 0.06$ . (b) では 2 つの固定点があり、( $\cdot$ ) 印は (a) に対応しており、( $+$ ) 印は異なる初期条件から出発して得られた逆方向に進行する時空パターンに対応する.

条件によっている.  $\chi$  平面で見ればアトラクターはそれまで原点对称だったリミットサイクルが、それぞれ原点に対して非対称のリミットサイクルの対に分離していることがわかる. それぞれの軌道の「重心」は原点からずれているが、全体としてカイラル対称性を保っている (Figure 4.11 参照).  $\gamma = 0.09$  では軌跡はジグザグパターンを描く. 同時に  $\chi$  平面では 2 つのリミットサイクルが原点对称な 1 つの軌道に再結合しており、カイラル対称性が回復している (Figure 4.12 参照). この閉じた軌道の分離・結合による分岐はカオスに至る過程に報告されている [68, 69]. 最後に  $\gamma = 0.06$  では界面は一様な速度でドリフトしており、Bloch 型界面が形成されたことがわかる. Figure 4.11 の振動を含んだドリフト型と同様、ドリフトの方向は初期条件によっている.  $\chi$  平面ではアトラクターは 2 個の固定点から成り立っていることがわかる (Figure 4.13 参照).

Table 4.1 に一連の時空パターン、 $\chi$  平面で見たアトラクターの形と分岐のタイプをまとめた. ただし、ジグザグ-Bloch 転移で起こる分岐のタイプはまだ特定されていない. リ



Table 4.1: 非変分効果が強い場合 ( $c_1 = -0.5, c_2 = 1.0, \Delta = 0.0$ ) での界面の運動、アトラクターと分岐の種類

bifurcation type	$\gamma$	spatiotemporal pattern	attractor
	$\vdots$		
Hopf $\rightarrow$	0.28	stationary (Ising wall)	a fixed point at the origin
	( $\gamma_c \sim 0.27$ )		
	0.24	sinusoidal oscillation	a limit cycle
period doubling $\rightarrow$	$\vdots$		
	0.20	'double step' oscillation	a double limit cycle
limit cycle separation $\rightarrow$	$\vdots$		
	0.18	oscillatory drift	a pair of limit cycles
limit cycles recombination $\rightarrow$	$\vdots$		
	0.09	zig-zag	a limit cycle
	$\vdots$		
	0.06	steady drift (Bloch wall)	a pair of fixed points
	$\vdots$		

Table 4.2: 非変分効果が弱い場合 ( $c_1 = -0.1, c_2 = -0.15, \Delta = -0.25$ ) での界面の運動、アトラクターと分岐の種類

bifurcation type	$\gamma$	spatiotemporal pattern	attractor
	$\vdots$		
pitchfork $\rightarrow$	( $\gamma_c \sim 0.44$ )	stationary (Ising wall)	a fixed point at the origin
	$\vdots$		
		steady drift (Bloch wall)	a pair of fixed points

ミットサイクル解から固定点对への分岐は前節での一様解の分岐シナリオと同様に、SN 分岐だけが起こる場合 (前節の Figure 4.2 でいえば  $X1 \rightarrow A5$ ) と、SN 分岐と Heteroclinic Saddle Connection の 2 種類が起こる場合 (前節の Figure 4.2 でいえば  $X1 \rightarrow E5 \rightarrow A5$ ) の、2 通りの可能性がある。前者ではジグザグパターンのそれぞれの線分が長くなっていった極限に Bloch 型があるが、後者ではジグザグ型と Bloch 型が共存することを意味する。しかし、この分岐のタイプを特定することは数値的に困難であり、ここでは追求しない。

また、Coullet らによって報告されている Ising-Bloch 転移は  $\chi$  を用いれば pitchfork 分岐が起こっていると解釈できる (Table 4.2 参照)。このことは Ising-Bloch 間の分岐シナリオは  $c_1, c_2, \Delta, \gamma$  に依存することを意味している。実際ここで述べた Ising 型から Bloch 型へいたる分岐のシナリオは典型的な一例であって、パラメータを変えることによって、より複雑なタイプの振動が実現されたり、分岐の順序の入れ替えが起こったりする。例えば、パラメータを  $c_1 = 0, c_2 = 1.15, \Delta = 1.567, \gamma = 0.367$  に選ぶと Figure 4.14(a) に見られるような極めて複雑な振動が実現される [70]、 $c_1 = -0.5, c_2 = 1, \Delta = 0.131, \gamma = 0.1$

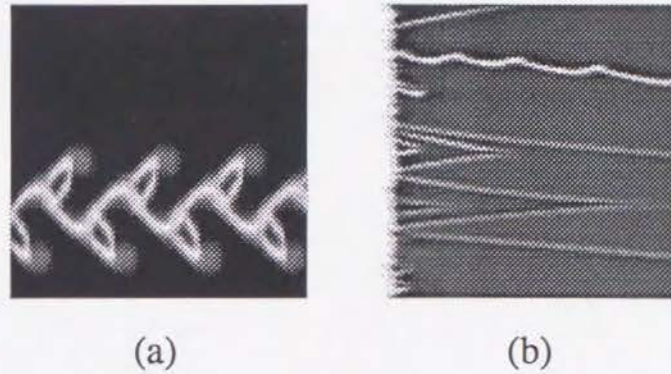


Figure 4.14: (a) 複雑な運動をする振動界面. システムサイズは  $L = 64.0$ 、初期条件は (4.47) で与え、 $T = 100 \sim 200$  をプロットした. (b) Bloch 型界面とドリフト振動型界面の共存. システムサイズは  $L = 256.0$ 、初期条件はランダムで  $T = 0 \sim 100$  をプロットした.

では Figure 4.14(b) に見られるように、Figure 4.11 のドリフト振動型の界面と Figure 4.13 の Bloch 型の界面とが共存する<sup>5</sup>.

いずれにせよ、Ising 型の界面に対し Hopf 型と pitchfork 型の分岐を引き起こすような 2 種類の不安定性が存在することは注目すべきである. なぜならばパラメータ空間のどこかに余次元 2 の分岐点があることを示しているからである. 現在のところ、その点での分岐構造は解決すべき問題として残されている.

### 4.2.3 複数界面の運動・パターン

この小節では複数の界面が関与する現象について二点述べる. 一つは界面間の相互作用についてであり、もう一つは界面の増殖現象についてである. まず第一に、界面間の相互作用について述べる.

Kawasaki, Ohta によれば界面の幅を特徴付ける長さに比べて十分離れた界面同士の相互作用は界面のテールの形だけで決まることが知られている [54, 60, 61, 71]. Couillet らによってテールの漸近形が振動を含んだ指数関数で表される場合には、キンク間の相互作用は引力と斥力を交互に繰り返す、その結果キンクの複雑な配置が可能であるということが示されている [55, 72]. この系の場合、界面のテールの形は、パラメータによって変化し、振動を含む場合と含まない場合のいずれも起こり得ることが示された (付録 A 参照). また、Bloch 型界面の場合には、カイラル対称性を破っているので、界面の両側でテールの形が異なった結果、同一種界面間の相互作用が斥力になる可能性もある<sup>6</sup>. また、界面が振動型の場合には界面間の相互作用の結果、界面の振動の引き込み現象が予想される. 結合した振動子については文献 [1] に詳しい.

<sup>5</sup> 残念ながらこの系では単独界面のカオティックな振舞いはまだ発見されていない [59].

<sup>6</sup> 4.2.2 で述べた通り、パラメータによっては異なる 2 種類のタイプの界面が共存することができる. この時の相互作用もそれぞれの場合に応じて考えなければならない.



ただし、いずれの場合も注意しなければならないのは上述の議論は、界面間の距離  $l$  が界面の幅  $d$  に比べて十分大きなところでしか適用できないことである。すなわち界面が Bloch 型やドリフト振動型の様に有限の平均速度を持っていて、互いに衝突する方向に動いたり、引力相互作用の結果、問題となる界面同士が引き寄せられたりして、 $l \sim d$  となってしまうと、もはや上述の議論は適用されない。特にキンクと反キンクが必ず対消滅するという保証はどこにもないのである。なお、この系に関しては最近 Korzinov らも Ising 型、Bloch 型の界面同士の相互作用を論じている [73]。

次に、複数の界面が関与する興味深い他の現象として、界面が増殖するパターンを紹介する。典型的なパターンは例えばパラメータ  $c_0 = 1.3, c_1 = -0.5, c_2 = 1.0, \gamma = 0.25$  で得られる (Figure 4.15(a) 参照)。初期条件を一様に変えれば変化はなく定常状態にあるが、初期条件として (4.47) を選ぶとセルオートマトンの様に界面が増殖していき、系全体に広がってしまう。Figure 4.15(a) はランダムな初期条件からの時空パターンである。このパターンはセルオートマトンや、複素 Ginzburg-Landau 方程式、減衰型 Kuramoto-Sivashinsky 方程式などで報告されているいわゆる時空間欠的なパターンと酷似している [74, 75, 76, 77]。統計的な量を測ることによってそれらと比較することはできるが、詳しい数値解析はまだ行なわれていない。

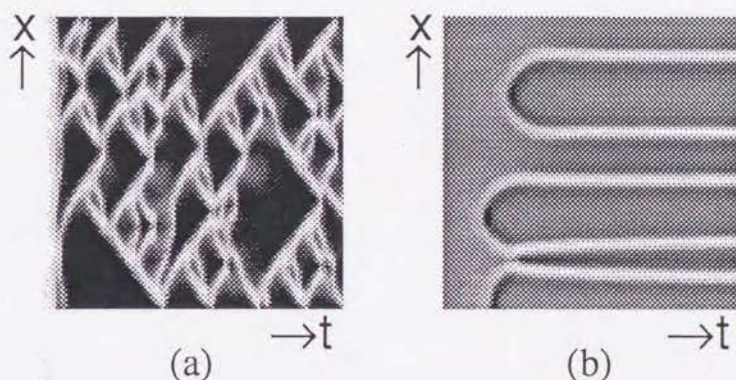


Figure 4.15: (a) 時空間欠的な発展。界面が生成消滅を繰り返しているのがわかる。(b) 引き込みの破れによる空間構造の形成。いずれもシステムサイズは  $L = 64.0$  で  $T = 0 \sim 100$  までを表示した。パラメータは本文参照。計算方法などのその他の条件は Figure 4.4 と同じ。

#### 4.2.4 引き込みの破れと空間構造の形成

この小節では引き込みが破れた場合に起こる現象について述べる。引き込みの破れは安定固定点対の消滅を意味するので、もはや系は双安定ではなくなり、界面は存在しなくなる。しかし、その結果は一様振動状態へ緩和するとは限らず、空間的な構造をつくることが発見されている。例えばパラメータを  $c_0 = 0.5, c_1 = -0.5, c_2 = 1$  に固定しておいて  $\gamma$  を 0.4 から 0.3 に変化させる。この時、 $\gamma = 1/2\sqrt{2} \sim 0.354$  で SN 分岐ラインを通過し、一様状態の引き込みが破れるのであるが、その結果は必ずしも一様振動状態が実現さ

れるのではない。微小な擾乱を加えることによって界面列のような空間構造が形成される<sup>7</sup>。Figure 4.15(b) は、 $\gamma = 0.3$  に対して、 $W = W_0$  に微小な擾乱を加えたものを初期条件として選んだ場合の時空パターンである。これは厳密な意味で界面ではないが、空間構造を作ることによって引き込みを回復しているものと思われる。

なお、 $\Delta$  の符号を変えても同じ  $\gamma$  で引き込みが破られるが、破れた後の振舞いは  $\Delta$  の符号によって異なったものになる。例えば、上述のパラメータで  $c_0$  だけを 1.5 に変えると  $\Delta = -0.5$  となり、引き込みは破れているが、この場合空間構造は形成されず、一様振動解に緩和する。

#### 4.2.5 まとめ

次の節のために 1 次元系での数値実験等から得られた界面の種類と現象をまとめておく。

- 単独界面

- Ising 型：静止しており、その形は決まっている。すなわち自由度は持っていない。
- Bloch 型：一般的には一定速度で運動しており、2 種類の形を取り得る。すなわち離散的な自由度を持つ。
- 振動型：正弦波型・二重振動型・ドリフト振動型・ジグザグ型などの様々な形で振動しており、位相の分だけ連続的な自由度を持つ。

なお、界面の形はテールの形でも特徴付けることができ、その形には単純な指数関数で表されるものの他に、振動を含んだ形もある。

- 界面が複数関与するパターン

- 界面間の相互作用による分類。
- 時空間欠的な発展。

- 引き込みの破れと空間構造の形成

---

<sup>7</sup>この様な空間構造は安定固定点対がある場合でも、一様状態の変調不安定性によって作られる可能性がある。



## 4.3 2次元系

本節では(4.42)を2次元に拡張した系

$$\partial_t W = (1 + ic_0)W + (1 + ic_1)(\partial_x^2 + \partial_y^2)W - (1 + ic_2)|W|^2 W + \gamma \bar{W} \quad (4.50)$$

を考える。研究の対象となった液晶対流系の実験も2次元の系であり、また「ひも」が端点を持つために必要最小な空間次元である。この章では端点を持たない「ひも」(すなわち単なる界面)場合に限定しているが前章で行なわれた1次元系とそこに現れる0次元界面の性質から予測される結果や、高次元系であることが本質的に効いてくる効果などが絡みあって複雑な運動が実現されることが示される。まず、前節の結果から予想される振舞いを考えてみよう。

### 4.3.1 低次元系からの単純な拡張

前節の1次元系におけるIsing型の0次元界面の性質を2次元系における1次元界面に拡張することは容易である。すなわち、Ising型界面の場合、界面は自由度を持たないので、その運動は曲率とテールの形によってのみ決定される。界面間の相互作用はテールの形によるが、単なる指数関数的減衰ならば引力型となり(非常にゆっくりとしたタイムスケールで)近付いていくと思われる(Figure 4.16参照)。また、テールの形が振動を含むならば界面列が構成されるものと思われる。

ところがBloch型及び振動型の場合、界面は自由度を持っている。この場合テールの形と曲率の他に界面そのものの形、すなわち界面の自由度を考えなければならない。一様な界面、つまり1次元界面に垂直な方向の断面を見た時にどこでも同じ形をしている—いわば金太郎飴のような状態—ならば、界面の自由度は無視することができ、その運動はIsing型と同様にテールの形と曲率で決定される。しかし、非一様な界面が構成された場合はどうであろうか。すなわちBloch型には2種類の界面 $B_+$ と $B_-$ が存在し、振動型には位相の分だけ無限種類の界面 $O_\phi$ が存在するが、それらが結合した場合何が起こるかを考えなければならない。例えば次のような状況を考える。 $xy$ 平面上に対して、 $x > 0, x < 0$ にそれぞれ $W_+, W_-$ に対応するドメインがあった時、 $x = 0, y > 0$ の部分に $B_+$ 型のBloch界面があり、 $x = 0, y < 0$ の部分に $B_-$ 型のBloch界面があるとする。この時、つながれたBloch型界面は逆方向に移動しようとした結果、原点を中心として螺旋を描き、波を放出することが予想される[41, 78]。このことからわかる通り、我々はもっと一般的に自由度を持った界面の高次元的な振舞いを調べなければならない。

### 4.3.2 界面上の内的な系

1次元系の(0次元)界面に対しては例えば $\chi$ の振舞いによって特定することが出来る。すなわち、Ising型ならば界面は1つの形しか取り得ないが、Bloch型ならば2種類、正弦波的振動型ならば振動の位相の分だけ無限種類の形を取り得る。対応する2次元系の(1次元)界面はそのような自由度を持った点が1次元上に分布していると考えられる。



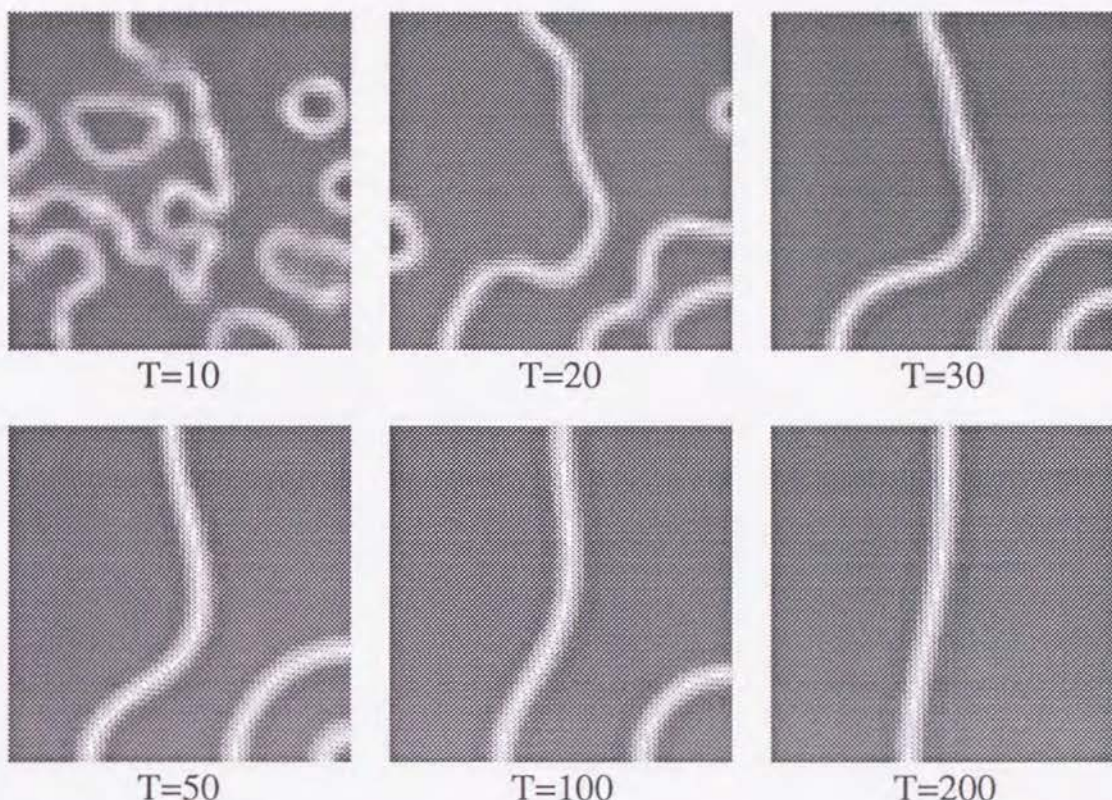


Figure 4.16: 2次元系の Ising 型界面の緩和過程.  $c_1 = -0.5, c_2 = 1, \Delta = 0, \gamma = 0.28$ 、システムサイズは  $64.0 \times 64.0$ . 初期条件は  $W = 0$  に小さな擾乱を与えた. 時間及び空間ステップ  $dt = 0.01, dx = 1.0$  の単純 Euler 法を用い、自由境界条件を課した.

例えば、もし界面が十分平坦で他の界面とも十分離れていれば、界面に沿った方向を  $\xi$ 、それに垂直な方向を  $\eta$  と定義することによって、界面上に  $\chi(s, t)$  を次のように定義することが出来る.

$$\chi(s, t) \equiv \int W(\xi(s), \eta(s), t) \Psi(\xi(s), \eta(s), t) d\eta(s). \quad (4.51)$$

ただし、 $s$  は界面に沿った座標である. 無論、 $\Psi(\xi, \eta, t)$  は  $\eta$  方向に積分する際の重み関数であり、前節のものと同様の性質が要求される. (界面の曲率が大きくなる、あるいは界面の近くに別の界面が来ればこのような投影  $\chi(s, t)$  が定義できなくなることに注意.) この界面上の定義された複素量  $\chi(s, t)$  の従うダイナミクスにある程度の推量が成り立つ.

もし界面が常に平坦ならば (そんなことは一般的ではないが)、 $\xi = s = x, \eta = y$  とおき、方程式 (4.50) を  $\Psi$  付きで積分することによって 次のような  $\chi(x, t)$  の従う方程式を得る.

$$\begin{aligned} \partial_t \chi(x, t) &= (1 + ic_0) \chi(x, t) + (1 + ic_1) \partial_x^2 \chi(x, t) \\ &\quad - (1 + ic_2) \int |W(x, y, t)|^2 W(x, y, t) \Psi(x, y, t) dy + \bar{\chi}(x, t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

無論、この方程式は  $\chi(x, t)$  について閉じてはいないが、その形は  $W(x, y, t)$  に対するモ



デル方程式と良く似ている。従って、 $\chi(x, t)$  の一様状態が双安定であったり振動的であっても何ら不思議ではないのである。

$\chi$  は複素量であることに注意すれば、もし、 $\chi(x, t)$  の一様状態が振動的ならば界面は振動子が1次元的に並んだものと解釈できる。 $\chi(x, t)$  の一様状態が双安定ならばその双安定状態を結ぶ界面解に Ising 型や Bloch 型、あるいは振動型のような多様性があるかも知れない。このように界面が内部自由度を持っている場合はその界面上に空間の次元が一つ低い系を定義することが出来る。以下、これを界面上の内系 (internal system on interface) と呼ぶ。

この時実際のパターンでは何が起こるのであろうか。以下界面が Bloch 型、すなわち内系が双安定である場合を例にとりて詳しく考察してみる。2つの Bloch 面  $B_+$  と  $B_-$  がコネクした状況を考えてみよう。 $\Psi$  の重みつきで  $W$  をノーマルな方向に積分することによって、界面上の各点に  $\chi$  を定義することができる。Bloch 面は二つの  $\chi$  の値 ( $\chi_+$  と  $\chi_-$ ) をとる1次元の双安定系と考えることができ、コネクした点はその1次元双安定系の界面と考えることができる。いわば界面の中に界面ができる訳であるが、混乱を避けるため、この界面の界面を0次元界面またはコネクポイントと呼び、それまでの界面を1次元界面と呼ぶ。もし0次元界面が Ising 型ならばそのコネクポイントは動かず、1次元界面は螺旋を描く。しかし、もし0次元界面が Bloch 型ならばそのコネクポイントは1次元界面に沿って一様な速度でドリフトを始めるであろう。その結果、パターン全体の運動は1次元界面の運動とコネクポイントの運動が複合したものとなる。Bloch 型の1次元界面の速度の大きさを  $v_1$  とし、Bloch 型の0次元界面、すなわちコネクポイントの1次元界面に沿った速度を  $v_2$  とすると、極端な場合、 $v_1 \gg v_2$  ならば1次元界面は螺旋波を描き、 $v_1 \ll v_2$  ならばコネクポイントが1次元界面上をすみやかに運動することが予想される。しかし、 $v_1 \sim v_2$  の場合は単純ではない (Figure 4.17 参照)。このコネクポイントに対する Ising-Bloch 転移は、対称性の観点から見れば、1次元キンク解に対するカイラル対称性 (4.46) と同様、コネクポイントの次のような変換に対する対称性とその破れとして考えることができる。

$$\begin{cases} W & \rightarrow W e^{i\pi} = -W \\ \xi & \rightarrow -\xi \\ \eta & \rightarrow -\eta \end{cases} \quad (4.53)$$

我々は数値実験によって1次元界面とコネクポイントの運動を観測した。この複合運動が我々の当初の目的である「閉じたひも」の並進運動を定性的に説明することを示すため、初期条件を次のようにおいた (Figure 4.18(a) 参照)。

$$W(x, y, 0) = \begin{cases} W_0 & \text{if } \sqrt{x^2 + y^2} < L/6 \\ -W_0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.54)$$

ただし、原点を中心に、 $y$  軸を垂直方向にとり、 $y$  の符号に応じて異なる向きの Bloch 型界面に緩和するような微小な擾乱を加えた。この時予想される界面及びコネクポイントの運動は次のようになる。 $B_+$  である  $y > 0$  の1次元界面は  $-W_0$  を侵食し、 $B_-$  である  $y < 0$

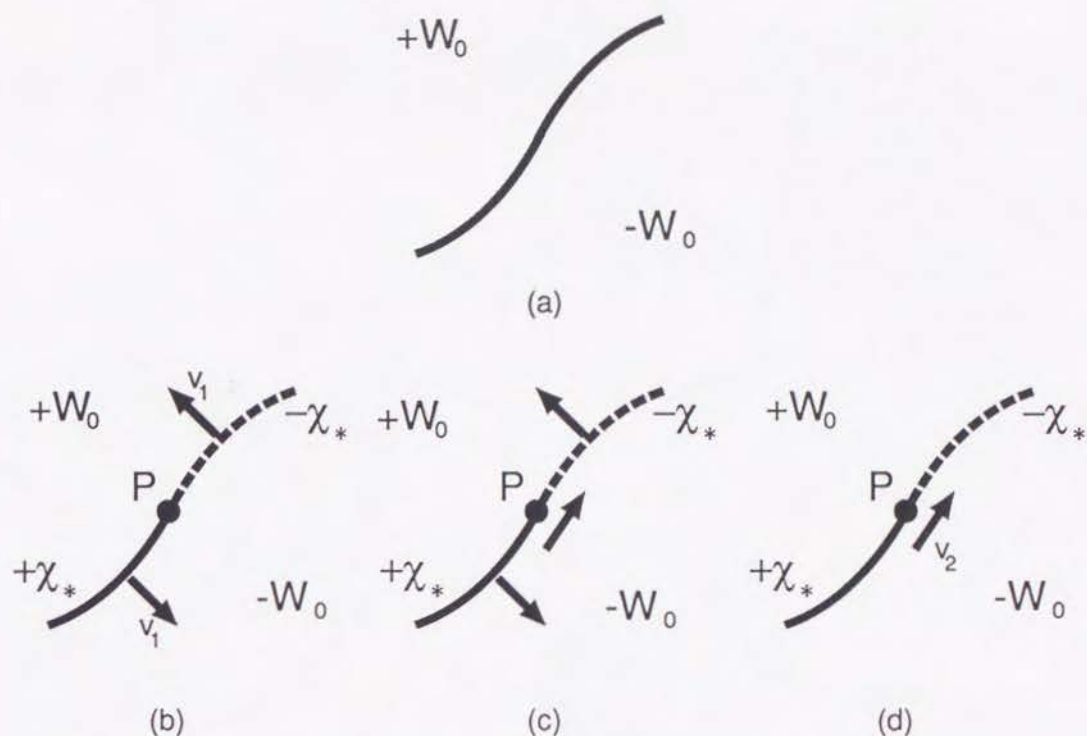


Figure 4.17: 界面とコネクトポイントの模式図. (a) 2次元系を2つの領域 $+W_0$ と $-W_0$ に分ける Ising 型界面. 界面が自由度を持たないためコネクトポイントは無い. (b)(c)(d) Bloch 型 1次元界面とコネクトポイント. 2次元系を2つの領域 $+W_0$ と $-W_0$ に分ける界面がコネクトポイント P によってさらに $+\chi_*$ と $-\chi_*$ に分離されている. ただし (b) は 1次元界面の速度  $v_1$  に比べコネクトポイント P の速度  $v_2$  が無視できる場合. (c) は  $v_1$  と  $v_2$  が同じオーダーの場合. (d)  $v_1 \ll v_2$  の場合.

の 1次元界面は $+W_0$ を侵食するので、いずれも  $y > 0$  方向に運動する. これに対しコネクトポイントは  $B_+$ を侵食するか  $B_-$ を侵食するかは初期状態によるものと考えられる. ランダムネスを変えることによっていずれのコネクトポイントも  $y > 0$  方向に運動するような初期条件から、様々なパラメータによって数値実験を行なった結果を Figure 4.18 に示す.  $\Delta = 0.15$  ではコネクトポイントの速度に比べて界面の速度が十分大きく、得られるパターンは螺旋である (Figure 4.18(b)). ところが、 $\Delta = 0.1$  になると、 $W_0$ のドメインが  $y > 0$  方向に移動しているのがわかる (Figure 4.18(d)). パラメータをさらに細かく選ぶことによって移動しながら広がっていくケース (Figure 4.18(c)) や移動しながらつぶれていくケース (Figure 4.18(e)) を再現することも出来る.  $\Delta = -0.15$  の場合、逆にコネクトポイントの速度が界面速度に比べて大きくなり、コネクトポイントが界面上を運動して対消滅している. その結果界面はすべての領域で  $B_-$ になり、 $W_0$ のドメインを侵略した結果つぶれて消えてしまう (Figure 4.18(f)).

しかし残念ながらこの数値実験で得られた 1次元界面とコネクトポイントの複合運動が、本当に内系の界面に対する Ising-Bloch 転移の結果なのかどうか確かめられていな



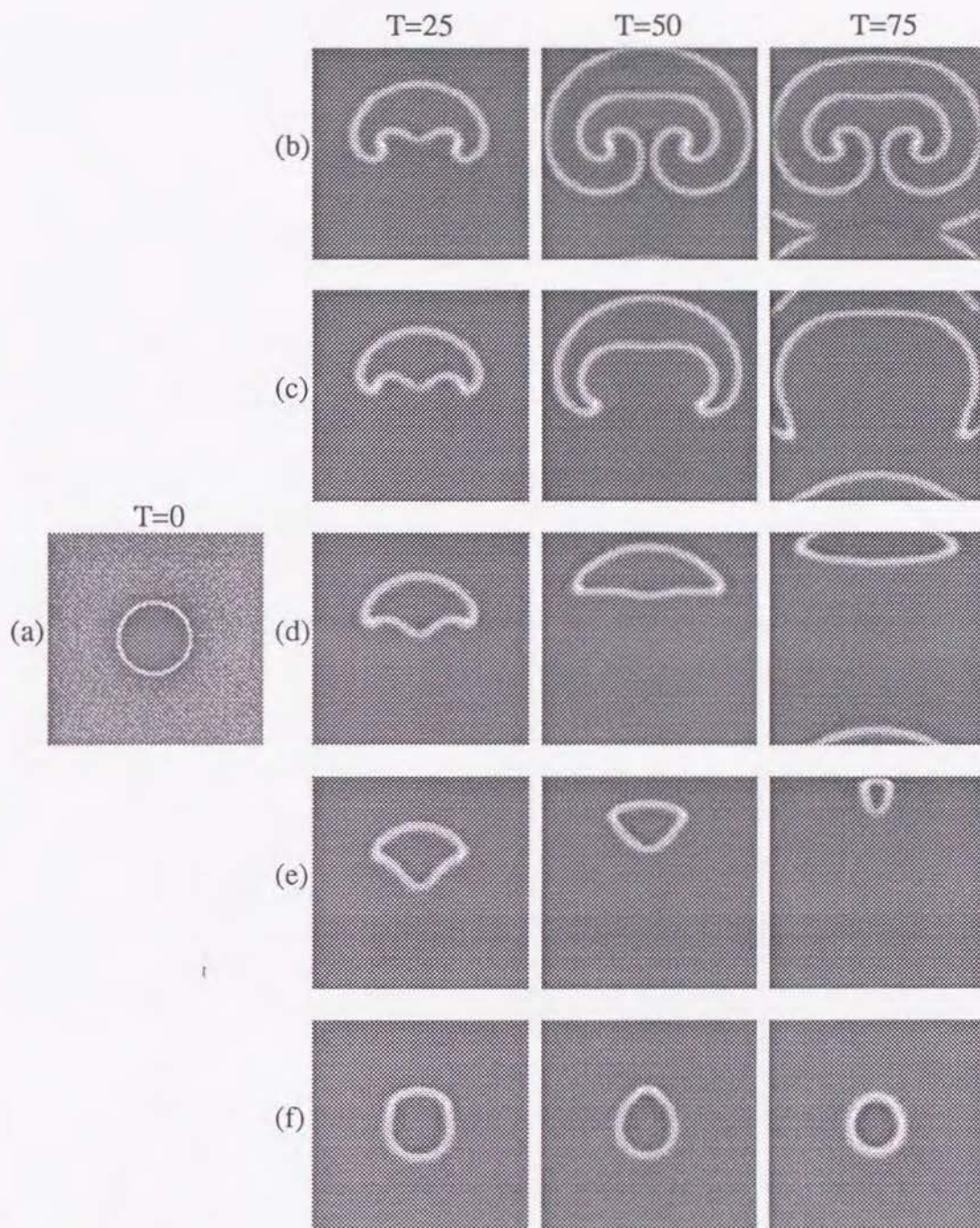


Figure 4.18: 界面とコネクトポイントの複合運動.  $c_1 = 1, c_2 = 0, \gamma = 0.2$  に固定し、 $\Delta$  を次のように変えた. (b) 0.15 (c) 0.125 (d) 0.1 (e) 0.05 (f) -0.15. システムサイズは  $100.0 \times 100.0$ . 初期条件は (4.54) すなわち (a) の形で与えた. 時間及び空間ステップ  $dt = 0.025, dx = 1.0$  の単純 Euler 法を用い、周期境界条件を課した. 明るい灰色で表される 1 次元界面の中にコネクトポイントの対が白く見える. ただし (a) ではまだ形成されていない. また (f) の  $T = 75$  では、コネクトポイントは既に対消滅してしまっている.



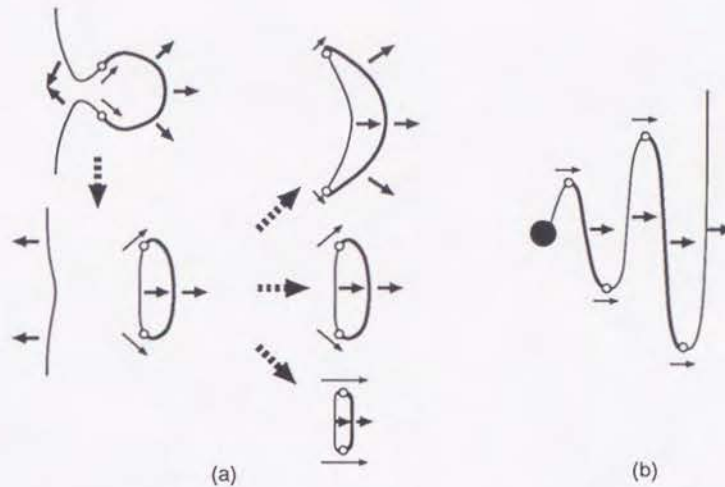


Figure 4.19: 「ひも」のアクティブな振舞いのメカニズム. (a) 輪の生成と並進運動. (b) 波打ち運動. 太い線、細い線はそれぞれ  $B_+$ ,  $B_-$  の Bloch 型界面を表し、太い矢印で表される速度で動く.  $\circ$  はコネクトポイントでを表し、細い矢印で表される速度で動く. 端点 ( $\bullet$ ) からコネクトポイントが生成され続けなければならない.

い. なぜならば、Bloch 型の界面は一般に動くので界面上に  $\chi$  を定義するような適当な方向が常に見つかるとは限らないのである. そのため、内部自由度を持った界面の運動方程式を構築することが現在試みられている. また、波打ち運動 (Figure 2.6(b)) も同様のメカニズムを考えることによって定性的に説明できるが、そのためには端点がコネクトポイントを生み出し続けなければならない (Figure 4.19 参照). 残念ながら現在までに端点を持つモデルでそのような端点を再現できていない.

最後に拡張性について三点述べておく. 第一点是对称性に関するもので、ここで議論したモデル (4.50) は  $P_\pi$  対称性 (4.8) を満たしているが、それは界面の自由度と内系の存在には本質的ではない. すなわち、内系とそれが引き起こす界面の複雑な運動が生ずるためには界面が自由度を持ち、その自由度によって界面の運動が異なることが必要十分なのである.

第二点は界面の自由度の種類に関するものである. 界面が Bloch 型ではなく、振動型の場合はどのようなのであろうか. この場合内系が振動的になるので振動子が 1 次元的に並んでいることに対応し、1 次元複素 Ginzburg-Landau 方程式との類推を考えることが出来る. すなわち、一様振動状態に緩和する他に、Benjamin-Fair 領域でおこる乱流状態や Nozaki-Bekki のホール解に対応するような局在構造が予想される [79]. この時実際の 2 次元パターンでは一様振動界面や、乱れた界面、界面上のある点から界面に沿った位相波の伝搬などの現象が観測されると思われる. また、Mimura, Kobayashi によって論じられている燃焼における振動界面にも同様の複雑な運動が期待できる [59].

第三点は、より高次元系への拡張に関するものである. この節の議論を 3 次元以上に拡張するのは容易であることは言うまでもない. 一般に双安定な  $N$  次元系の安定状態で占められる領域を  $W_1^{(N)}, W_2^{(N)}$  とし、それらの境界である界面を  $W^{(N-1)}$  とする. もし界面



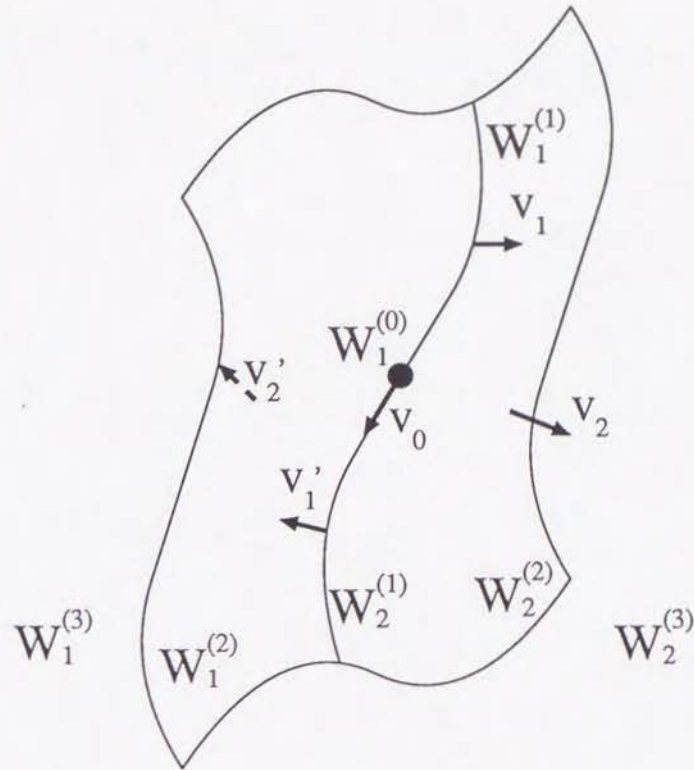


Figure 4.20: 3次元双安定系での界面  $W_j^{(2)}$  と 'コネクタライン' (界面の界面)  $W_j^{(1)}$  とコネクトポイント (界面の界面の界面)  $W_1^{(0)}$  それぞれ  $v_2, v'_2, v_1, v'_1, v_0$  の速度を持っている.

$W^{(N-1)}$  が内部自由度を持っており、それが振動的ならば  $W^{(N-1)}$  は  $N-1$  次元の振動的な系になるであろう. また、 $W^{(N-1)}$  が双安定ならば  $W^{(N-1)}$  を 2 つの領域  $W_1^{(N-1)}, W_2^{(N-1)}$  に分ける界面  $W^{(N-2)}$  が存在しうる. 無論、さらにこの界面  $W^{(N-2)}$  が内部自由度を持っていればその内系を考えることが可能であり、その際予想される界面の運動はその内系のバリエーションによってますます多様化するであろう. Figure 4.20 に 3 次元双安定系で 3 次元領域が 2 次元界面  $W^{(2)}$  によって  $W_1^{(3)}$  と  $W_2^{(3)}$  に分離され、さらに 2 次元界面  $W^{(2)}$  が 1 次元界面  $W^{(1)}$  によって  $W_1^{(2)}$  と  $W_2^{(2)}$  に分離され、さらに 1 次元界面  $W^{(1)}$  が 0 次元界面  $W^{(0)}$  によって  $W_1^{(1)}$  と  $W_2^{(1)}$  に分離されている様子を模式的に描いた.

### 4.3.3 その他のパターン

パラメータ空間  $c_0, c_1, c_2, \gamma$  は広大であり、そこで得られるすべてのパターンを分類し、パラメータ空間の地図を作るのは困難である. ここではこれまでに述べたパターン以外の興味深いものをいくつか紹介しておく. (ii)(iii) はいずれもその特徴抽出は難しく、今後の研究テーマに残されている. なお、いずれも時間及び空間ステップ  $dt = 0.01, dx = 1.0$  の単純 Euler 法を用い、自由境界条件を課した. システムサイズは  $64.0 \times 64.0$  で、 $W = 0$  に小さな擾乱を与えたものを初期条件とした.

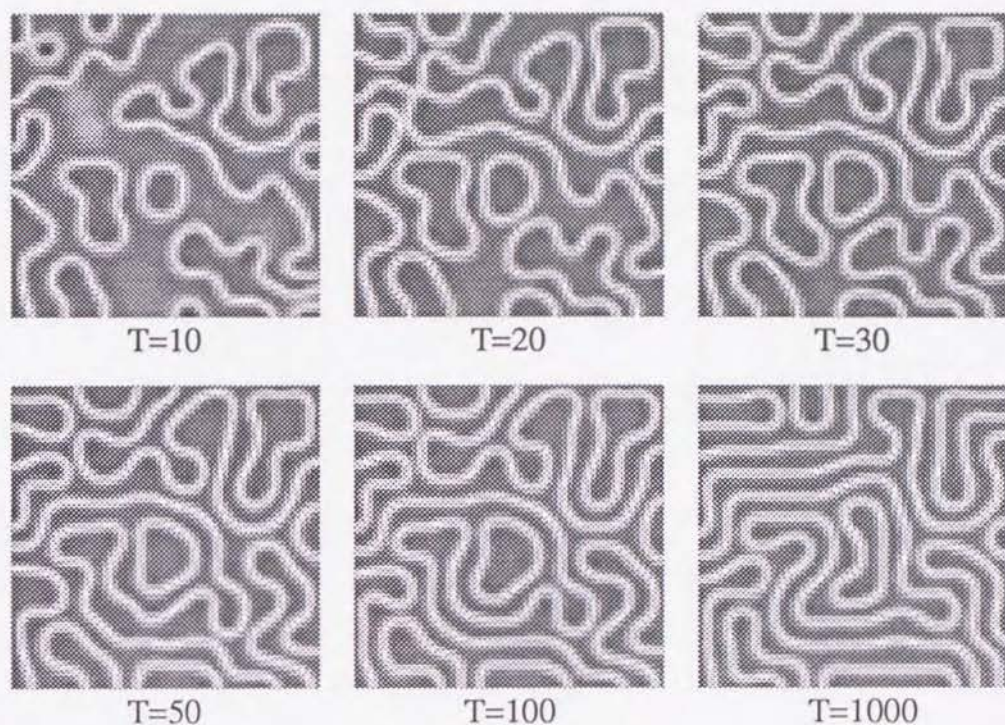


Figure 4.21: 周期構造.  $c_1 = -0.5, c_2 = 0, \Delta = 0.79, \gamma = 0.90$ .

- (i) 周期構造 (Figure 4.21): 界面の周期構造が形成される. 1次元系で界面列が形成されるパラメータと同様のパラメータで得られる.
- (ii) 吸盤模様 (sucker pattern) (Figure 4.22): 2次元パルス解と思われる局在構造が六角格子を作り緩和する. パラメータは (i) の周期構造を作るものに近い.
- (iii) 「ひも」乱流 (string turbulence) (Figure 4.23): 非定常の乱流状態. 1次元系で時空間欠的な振舞いを示すパラメータで得られる.

なお、(i)(ii) に関しては Coulet らも報告している [80].



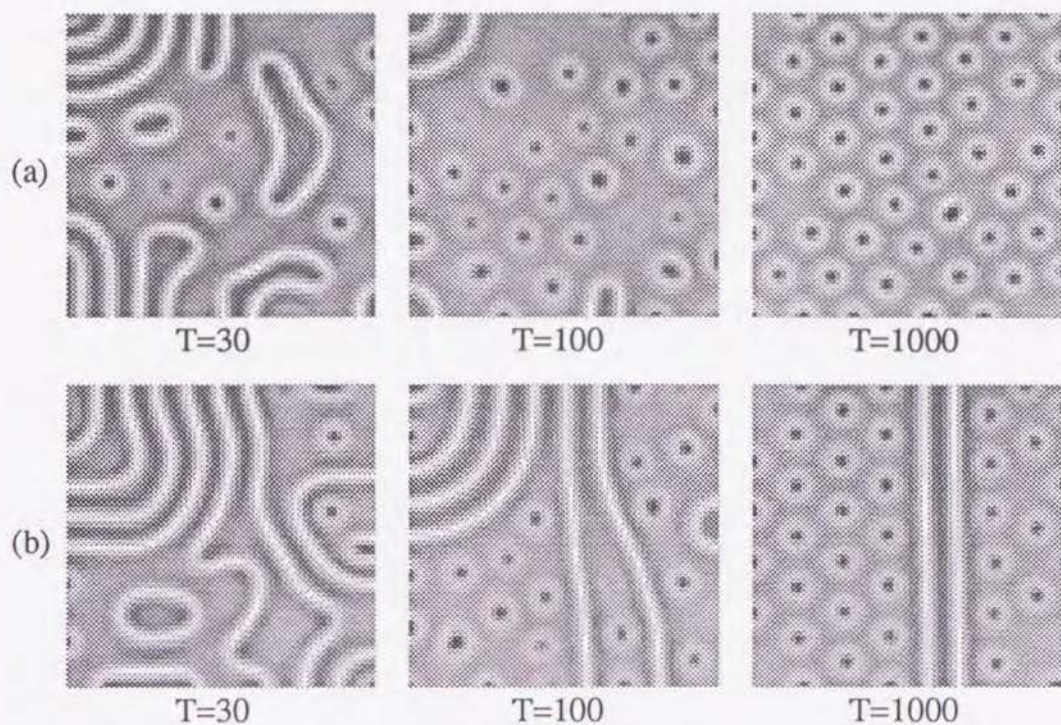


Figure 4.22: 「吸盤模様」. パラメータは  $c_1 = -0.5, c_2 = 1, \Delta = 0.7, \gamma = 0.5$ . ただし (a)(b) は乱数を変えて異なる初期条件を与えた. (b) では界面と局在構造の周期パターンが共存している.

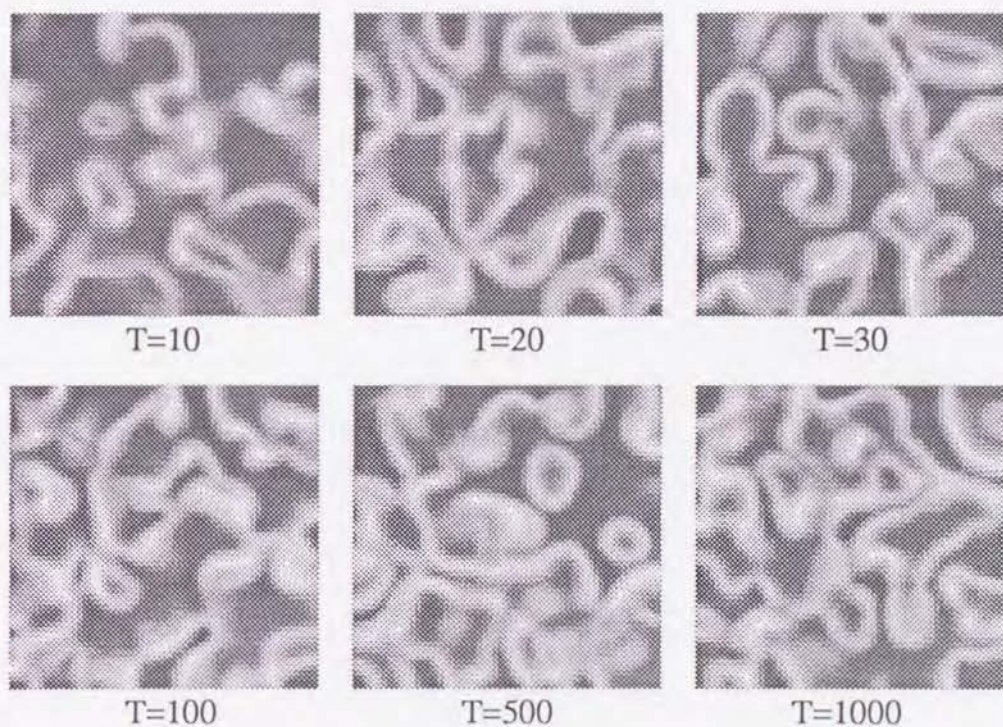


Figure 4.23: 「ひも」乱流.  $c_1 = -0.5, c_2 = 1, \Delta = -0.5, \gamma = 0.4$ .



## 4.4 まとめ

本章で得られた結果を統一的にまとめることは難しい。いずれにせよ、振動媒質に1対2の振動数比の周期外力をかけるという比較的単純なこのモデルに、これほど多岐にわたる現象が発見されたのは予想外の結果であった。以下得られた結果を簡単にまとめそれぞれの問題点を述べる。

4-1節ではモデル方程式(4.2)を導入し、拡散項を無視することによって系の一様な状態の安定性を解析した。パラメータのすべての値を調査したわけではないが、典型な解とその分岐構造はFigure 4.2, 4.3に見られるような複雑なものであった。4-2節以降で界面の運動を論じるために系の双安定性を仮定したので、系の振動的な性質は無視されたが、例えば次のような問題は残されている。系が双安定であると同時に振動的であるような場合(図4.2のB3, B5, C3, C5, C'5, E5の場合)、空間的なパターンはどうなるであろうか。例えば、初期条件として $x > L/2$ で安定固定点におき $x < L/2$ でリミットサイクル上に分布させることによって一種の‘界面’を構成し、その‘界面’はどちらにどんな速度で移動するかという問題を設定することも出来る。将来研究の予定である。

4-2節では1次元系の界面の振舞いについて論じた。この1次元系については既にIsing型とBloch型の界面が知られていたが、数値実験により様々なタイプの振動界面が発見された。また投影 $\chi$ をとり、アトラクターの断面を見ることによって、分岐の形を明らかにすることが出来た。単独界面のこのような複雑な運動に関する報告は少なく、わずかにMimura, Kobayashiによる燃焼現象をモデル化した方程式で振動し、倍周期分岐を次々と起こしてカオティックな運動をする界面が報告されているだけである。また、その他の現象として複数の界面による時空間欠的な発展や、引き込みの破れによる空間構造の形成を数値的に示した。残された問題としては余次元2の分岐点の分岐構造の解析や、時空間欠性の定量的な議論、引き込みの破れによる空間構造の形成に対するメカニズムなどがある。

4-3節では2次元系に関して論じた。4-2節で得られた1次元系の0次元的な界面の性質と曲率効果を考慮することによって予想される界面の運動が論じられた。その際Bloch型や振動型の様に界面が内部自由度を持っている場合には、界面上に内系を定義することができる。Bloch型の場合には内系が双安定となりそこに再び界面(コネクトポイント)が定義できる。そのコネクトポイントがIsing型からBloch型への転移を起こせばそのコネクトポイントは1次元界面上を動き出すであろう。その結果パターン全体の運動はこのコネクトポイントの運動ともの1次元界面の運動が組合わさったものになる。このように閉じたひもの並進運動のメカニズムを推論することができ、数値的にも再現することができた。しかし、その推論を確かめるには至っていない。「ひも」の波打ち運動も同様のメカニズムが働いていると思われる。が、そのためには端点がコネクトポイントを生み出し続けなければならない。残念ながら現在までにそのような端点は数値的にも見つからない。いずれにせよ端点の運動と内部自由度を持った界面の運動方程式を構築することは急務である。その他にはパルス解と思われる局在構造が整列する現象や乱流現象が数値的に見つまっているがいずれも特徴付けるのが困難であり、これらも今後の研究テーマとして残されている。



## Chapter 5

### Conclusion

2次元液晶対流系で発見された「ひも」に関する研究を行なった。2章で実験に関する簡単な説明をしたあと、3章ではその構造を論じた。実験で得られる諸条件を元に、端点を持つメカニズムを示すと共に、一般論を展開した。すなわち、パリティ変換  $P_x$  に対して異符号の固有値を持つ2つのモードからなる2次元的な周期パターンがある場合、端点を持った「ひも」が現れることを示した。我々は、この欠陥を反対称モードの振幅を表す  $A$  場と対称モードの振幅を表す  $S$  場の2種類の欠陥が組合わさってできることから、複合欠陥と命名した。「ひも」は反対称モードの振幅を表す場  $A$  の界面と見ることも出来るが、実際のパターンを見た時には位相  $\phi$  のとびと認識され易いことから「位相跳躍線 (phase jump line)」とも呼ぶことができる。さらに素過程を分類し、より単純な  $k-2k$  モデル (3.12) に対して閉じた「ひも」と開いた「ひも」が緩和過程において現れることを数値実験を通して示した。

4章では閉じた「ひも」の運動を論じた。用いたモデルが比較的単純な方程式 (4.2) で記述されるにも関わらず、その一様状態には Figure 4.2, 4.3 に見られるように様々な種類の解が存在し、その間には局所的分岐と大域的分岐の極めて複雑な分岐構造があることがわかった。また、準備段階として1次元系の界面運動を数値的に調べた結果、振動型の界面を発見し、投影  $\chi$  をとることによって分岐の形を明らかにした。また、界面の時空間欠的な発展と引き込みの破れによる空間構造の形成を数値的に発見した。2次元系では、良く知られている曲率効果以外の高次元効果として界面の内部自由度による効果を提案した。すなわち、空間が2次元以上の双安定系で Bloch 型や振動型のように界面が内部自由度を持っている場合に、界面が十分な滑らかであれば界面上に内系を定義することができる。この時、パターン全体の運動は界面の運動と内系のダイナミクスが組合わさったものになると予想される。この推論は残念ながら確かめられていないが、実験で観測されている「ひも」の動的な振舞いを旨く説明している。なお、この内部自由度の概念は容易に高次元系の場合に拡張できると同時にパルス解などの界面以外の局在構造にも適用可能と思われる。興奮性の媒質などに見られるパルス解が内部自由度を持った場合そのパルス解が1次元的な広がりを持てばパルスの内系を考えることが可能になる。

多くの問題が各章のまとめであげられているが、さらに残された問題として次のようなものがある。

- 開いた「ひも」の運動 (特に端点の影響)
- 「ひも」と「ひも」との相互作用
- 「ひも」の統計的な性質

なお、本研究の後半で用いられた共鳴外力系 (4.2) は見かけの単純さにも関わらず、実に多様な現象を見せてくれる。我々は界面の運動を研究するために系の双安定性を必要とした。そのために、共鳴外力の振動数と自然な振動数の比をほぼ1対2に限定したが、新たな研究対象として1対1、あるいは1対 $n$ の共鳴外力系を考えることができる。特に1対1の共鳴外力系は、パラメータによって振動媒質にも興奮媒質にもなることが知られており [78]、研究対象として大きな可能性を持っていると思われる。



# Bibliography

- [1] Y.Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984), and references quoted there in.
- [2] P.Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence* (Academic Press, Boston, 1992).
- [3] *Pattern Formation in Complex Dissipative Systems*, Edited by S.Kai, (World Scientific, 1992).
- [4] S.Chandrasekhar, *Liquid Crystals* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977).
- [5] S.Chandrasekhar and G.S.Ranganath, *Adv.Phys.* **35** (1986), 507.
- [6] K.Kaneko, *Europhys. Lett.* **6** (1988), 193.
- [7] K.Kaneko, *Physica* **34D** (1989), 1, and references quoted there in.
- [8] K.Kaneko, *Phys.Rev.Lett.* **63** (1989), 219.
- [9] K.Kaneko, *Phys.Rev.Lett.* **69** (1992), 905.
- [10] S.Sasa and H.Hirakawa, *Europhys.Lett.* **17** (1992), 685, and references quoted there in.
- [11] Y-h. Taguchi, *J.Phys.IIFrance* **2** (1992), 2103, and references quoted there in.
- [12] Y-h. Taguchi, *Phys.Rev.Lett.* **69** (1992), 1367.
- [13] H.Nishimori and N.Ouchi, *Formation of Ripple Patterns and Dunes by Aeolian Sand*, preprint.
- [14] T.Yanagita, *Phys. Lett. A* **165** (1992), 405, and references quoted there in.
- [15] 蔵本由紀 他, *パターン形成*, 朝倉書店, 1991(In Japanese), and references quoted there in.
- [16] A.C.Newell and J.A.Whitehead, *J.Fluid Mech.* **38** (1969), 279.

- [17] 佐野雅己, 物性研究 59 (1993), 539(in Japanese).
- [18] S.Sasa, T.Mizuguchi and M.Sano, Europhys.Lett. 19 (1992), 593.
- [19] T.Mizuguchi and S.Sasa, Prog.Theor.Phys. 89 (1993), 599.
- [20] P.G.de Gennes, *Physics of Liquid Crystals* (Clarendon Press, Oxford, 1982).
- [21] S.Kai and K.Hirakawa, Prog.Theor.Phys.Suppl. 64 (1978), 212.
- [22] S.Kai and W.Zimmerman, Prog.Theor.Phys.Suppl. 99 (1989), 458.
- [23] A.Joets and R.Ribbota, J.Physique, 47 (1986), 595.
- [24] E.Bodenshatz, W.Zimmerman and L.Kramer, J.Phys(*France*), 49 (1988), 1857.
- [25] E.Bodenshatz, W.Pesch and L.Kramer, Physica 32D (1988), 135.
- [26] S.Sasa, Prog.Theor.Phys. 83 (1990), 824.
- [27] S.Sasa, Prog.Theor.Phys. 84 (1990), 1008.
- [28] N.D.Mermin, Rev.Mod.Phys 51 (1979), 591.
- [29] E.D.Siggia and A.Zippelius, Phys.Rev. A24 (1981), 1036.
- [30] Y.Pomeau, S.Zaleski and P.Manneville, Phys.Rev. A27 (1983), 2710.
- [31] K.Kawasaki, Prog.Theor.Phys.Suppl. 79 (1984), 161.
- [32] K.Kawasaki, Prog.Theor.Phys.Suppl. 80 (1984), 123.
- [33] G.Tesauro and M.C.Cross, Phys.Rev. A34 (1986), 1363.
- [34] S.Nasuno, M.Sano and Y.Sawada, J.Phys.Soc.Jpn., 58 (1989), 1857.
- [35] M.Sano, K.Sato, S.Nausno and H.Kokubo, Phys.Rev.A 15 (1992), 3540.
- [36] P.Couillet and G.Iooss, Physy.Rev.Lett., 64 (1990), 866.
- [37] H.Sakaguchi, Prog.Theor.Phys. 87 (1992), 241.
- [38] H.Sakaguchi, Prog.Theor.Phys. 87 (1992), 1049.
- [39] H.Sakaguchi, Prog.Theor.Phys. 88 (1992), 593.
- [40] T.Mizuguchi, Prog.Theor.Phys. 87 (1992), 1055.



- [41] P.Coullet, J.Lega, B.Houchmanzadeh and J.Lajzerowicz, Phys.Rev Lett. 65 (1990), 1352; and references quoted there in.
- [42] S.Sasa, Phys.Rev.A 46 (1992), 5268.
- [43] 例えば、森弘之・米沢富美子, 固体物理 22 (1987), 534 - 23 (1988), 329(in Japanese).
- [44] P.Coullet, R.E.Goldstein and G.H.Gunaratne, Phys.Rev.Lett. 63 (1989), 1954.
- [45] R.E.Goldstein, G.H.Gunaratne and L.Gil, Phys.Rev. A41 (1990), 5731.
- [46] W.Pesch and L.Kramer, Z.phys. B63 (1986), 121.
- [47] G.Dangelmayr, Dyn.Stab.Syst. 1 (1986), 159.
- [48] D.Armbruster, J.Guckenheimer and P.Holmes, Physica 29D (1988), 257.
- [49] H.Levine, W.Rappel and H.Riecke, Phys.Rev. A43 (1991), 1122.
- [50] S.Kai, private communication.
- [51] D.H.Lee and G.Grinstein, Phys.Rev.Lett. 55 (1985), 541.
- [52] J.Pang, C.D.Muzny and N.A.Clark, Phys.Rev.Lett. 69 (1992), 2783.
- [53] C.Matsuoka, private communication.
- [54] K.Kawasaki and T.Ohta, Physica 116A (1982), 573.
- [55] P.Coullet, C.Elphick and D.Repaux, Phys.Rev.Lett. 58 (1987), 431.
- [56] T.Ohta, D.Jasnow and K.Kawasaki, Phys.Rev.Lett. 49 (1982), 1223.
- [57] Y.Kuramoto, Prog.Theor.Phys. 63 (1980), 1885.
- [58] T.Ohta, A.Ito and A.Tetsuka, Phys.Rev.A 42 (1990), 3225.
- [59] 三村昌孝, 数理科学, 350 (1992), 18(in Japanese).
- [60] 太田隆夫, 物理学最前線 10 (1985), 3(in Japanese).
- [61] 太田隆夫, 物性研究 89 (1989), 619(in Japanese).
- [62] P.Coullet, J.Lega and Y.Pomeau, Europhys.Lett. 15 (1991), 221.
- [63] S.Nasuno, private communication.
- [64] S.Douady, S.Fauve and O.Thual, Europhys.Lett. 10 (1989), 309.

- [65] J.Guckenheimer and P.Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, Berlin, 1983).
- [66] J.Lajzerowicz and J.J.Niez, *J.Physique Letter* **40** (1979), 165.
- [67] S.Sarker, S.E.Trullinger and A.R.Bishop, *Phys.Lett.* **59A** (1976), 255.
- [68] Y.Kuramoto and S.Koga, *Phys.Lett.* **92A** (1982), 1.
- [69] A.Arnéodo, P.H.Coullet and E.A.Spiegel, *Phys.Lett.* **94A** (1983), 1.
- [70] J.Lajzerowicz and B.Houchmanzadeh, Domain wall in parametrically driven dynamical systems, preprint.
- [71] 蔵本由紀, 物性研究 **49** (1987), 76(in Japanese).
- [72] P.Coullet and C.Elphick, *Phys.Lett.* **121** (1987), 233.
- [73] L.Korzinov, M.I.Rabinovich and L.S.Tsimring, *Physical Review A* **46** (1992), 7601.
- [74] H.Chaté and P.Manneville, *Physica D* **37** (1989), 33.
- [75] H.Chaté, to be appeared in *Nonlinearity*.
- [76] H.Chaté and P.Manneville, *Phys.Rev.Lett.* **58** (1987), 113.
- [77] F.Daviaud, J.Lega, P.Bergé, P.Coullet and M.Dubois, *Physica D* **55** (1992), 287.
- [78] H.Sakaguchi, *Prog.Theor.Phys.* **88** (1992), 663.
- [79] K.Nozaki and N.Bekki, *J.Phys.Soc.Jpn.* **53** (1984), 1581.
- [80] P.Coullet and K.Emilsson, *Physica A* **188** (1993), 190.



# Appendix A

## 漸近的な振舞い

本節では安定な固定点ペアが存在する時にそれらを結ぶヘテロクリニック軌道に対応する界面解の漸近的な振舞いを調べる．一般に  $c_1, c_2, \Delta \neq 0$  の場合はポテンシャル系の場合と違って解析解が得られていない．しかし、Kawasaki, Ohta によれば界面間の相互作用はそのキンクのテールの形だけで決まることが知られている．このため我々は単独キンクの漸近的な形に着目した．方程式 (4.42) に対して、

$$W = X + iY \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_x W = \Phi + i\Psi \quad (\text{A.2})$$

とする． $\partial_t = 0$  とおくことにより

$$\partial_x X = \Phi \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_x Y = \Psi \quad (\text{A.4})$$

$$0 = X - (c_2 - \Delta)Y + \partial_x \Phi - c_1 \partial_x \Psi - A_0^2 X + c_2 A_0^2 Y + \gamma X \quad (\text{A.5})$$

$$0 = (c_2 - \Delta)X + Y + \partial_x \Psi + c_1 \partial_x \Phi - A_0^2 Y - c_2 A_0^2 X - \gamma Y \quad (\text{A.6})$$

を得る．これを  $\partial_x X, \partial_x Y, \partial_x \Phi, \partial_x \Psi$  に関して整理し、漸近的な振舞いを見るために

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ \Psi_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

とすると、四次元力学系における固定点  $(X_0, Y_0, \Psi_0, \Phi_0) = (X_+, Y_+, 0, 0)$  への近付き方は  $(x, y, \psi, \phi)$  に関する次の線形方程式の固有値問題として解かれる．

$$\partial_x \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ \phi \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{13} & f_{23} & 0 & 0 \\ f_{14} & f_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \psi \\ \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

ただし、

$$\begin{aligned} f_{13} &= -(c_2 - \Delta) + c_1(1 + \gamma) - (c_1 - c_2)(3X_0^2 + Y_0^2) \\ &\quad + 2(1 + c_1c_2)X_0Y_0/(1 + c_1^2) \\ f_{23} &= -(c_2 - \Delta)c_1 - (1 - \gamma) + (1 + c_1c_2)(X_0^2 + 3Y_0^2) \\ &\quad - 2(c_1 - c_2)X_0Y_0/(1 + c_1^2) \\ f_{14} &= -(c_2 - \Delta)c_1 - (1 + \gamma) + (1 + c_1c_2)(3X_0^2 + Y_0^2) \\ &\quad + 2(c_1 - c_2)X_0Y_0/(1 + c_1^2) \\ f_{24} &= (c_2 - \Delta - c_1(1 - \gamma) + (c_1 - c_2)(X_0^2 + 3Y_0^2) \\ &\quad + 2(1 + c_1c_2)X_0Y_0)/(1 + c_1^2) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

このとき固有値 $\lambda$ は次の固有値方程式に従う.

$$|\lambda E - f| = \lambda^4 - b\lambda^2 + c = 0 \quad (\text{A.11})$$

ただし、

$$\begin{aligned} b &= 2(-(c_2 - \Delta)c_1 - 1 + 2(1 + c_1c_2)(X_0^2 + Y_0^2))/(1 + c_1^2) \\ c &= (-\gamma^2 - 2(2c_2X_0Y_0 - (X_0^2 - Y_0^2))\gamma \\ &\quad + 3(1 + c_2^2)(X_0^2 + Y_0^2)^2 - 4(1 + c_2(c_2 - \Delta))(X_0^2 + Y_0^2) \\ &\quad + 1 + (c_2 - \Delta)^2)/(1 + c_1^2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

さらに  $X_0, Y_0$  を消去すると

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{1 + c_1^2}(-1 - (c_1(c_2 - \Delta))) \\ &\quad + 2(1 + c_1c_2)\frac{1}{1 + c_2^2}(1 + c_2^2 - c_2\Delta + \sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}) \\ c &= \frac{4}{(1 + c_1^2)(1 + c_2^2)}\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2}(\sqrt{\gamma^2(1 + c_2^2) - \Delta^2} + (1 + c_2^2 - c_2\Delta)) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

を得る.  $c > 0$  に注意. さて、 $b, c$  および  $D_4 \equiv (b/2)^2 - c$  の符号により固有値  $\lambda$  は次のように分類される.

- $D_4 < 0$  のとき、すなわちのとき  
 $\lambda^2$  は complex  $\Leftrightarrow \lambda$  ; complex



- $D_4 > 0$  かつ  $b > 0$  のとき、すなわちのとき  
 $\lambda^2$  は positive  $\Leftrightarrow \lambda; \pm\sigma_1, \pm\sigma_2$
- $D_4 > 0$  かつ  $b < 0$  のとき、すなわちのとき  
 $\lambda^2$  は negative  $\Leftrightarrow \lambda; \pm\omega_1, \pm\omega_2$

これらの結果は単キンク解の形と次の様に結び付いている。

- $\lambda$ ; complex のとき キンク解のテールの形は振動を含んだ指数関数的減衰である。
- $\lambda; \pm\sigma_1, \pm\sigma_2$  のときキンク解のテールの形は単純な指数関数的減衰である。